A.超对称SYK*的作用量

依据

$$
\begin{gathered}
\{\theta^+,\theta^+\} = \{\overline{\theta}^+,\overline{\theta}^+\} = 0 \\
\int d\theta^+ d\overline{\theta}^+\overline{\theta}^+\theta^+ = 1, \int d\theta^+ = 0, \int d\overline{\theta}^+ = 0
\end{gathered} \tag{1}
$$

由于我们考虑$\int d\overline{\theta}^+ d\theta^+$故而只对保留$\theta^+\overline{\theta}^+$的场，其余自动为零

1. Chrial Field Kinematic Part:

其中的$\overline{\Phi}$和$\partial\Phi$如下

$$
\overline{\Phi} = {\color{red}\bullet}\overline{\phi} - {\color{orange}\bullet}\sqrt{2\theta}^{+}\overline{\psi} - {\color{blue}\bullet}2\theta^+\overline{\theta}^+\partial\overline{\phi} \tag{2}
$$

$$
\partial\Phi = {\color{blue}\bullet}\partial\phi + {\color{orange}\bullet}\sqrt{2}\theta^+\partial\psi + {\color{red}\bullet}2\theta^+\ \overline{\theta}^+\partial^2\phi \tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
S_\Phi^0 &\equiv -\int d^2x \int d\overline{\theta}^+ d\theta^+ \overline{\Phi}\partial_{\bar{z}}\Phi \\
&= -\int d^2x \int d\overline{\theta}^+ d\theta^+ \cdot \overline{\phi}2\theta^+\overline{\theta}^+\partial^2\phi - 2\theta^+\overline{\theta}^+\partial\overline{\phi}\partial\phi - 2\overline{\theta}^+\overline{\psi}\theta^+\partial\psi \\
&= \int -4\overline{\phi}\partial^2\phi + 2\overline{\psi}\partial\psi
\end{aligned}
$$

rmk：这里$\overline{\psi}\theta^+$交换要产生负号

2. Fermionic Field Kinematic Part:

第一步

$$
\overline{\Lambda} : {\color{red}\bullet}\overline{\lambda} - {\color{orange}\bullet}\sqrt{2\theta}^{+}\overline{G} - {\color{blue}\bullet}2\theta^+\overline{\theta}^+\partial_z\overline{\lambda} - \sqrt{2}\theta^+\overline{E} \tag{4}
$$

$$
\Lambda : {\color{blue}\bullet}\lambda - {\color{orange}\bullet}\sqrt{2}\theta^+ G + {\color{red}\bullet}2\theta^+\overline{\theta}^+\partial_z\lambda - \sqrt{2\theta}^{+} E \tag{5}
$$

除了E场以外，其他操作同chiral field, 我们先讨论这一部分，因为这一部分不涉及复高斯变量$J_{ai_1...i_q}$ 所以比较简单。所以此时wlog认为E为0，也可以得到彭老师论文中部分结果

注意：这里λ是格拉斯曼变量场，G, E 是标量场 ${\color{red}\star}$

$$
\begin{aligned}
S_{\Lambda}^{0} \equiv & \frac{1}{2} \int d^{2}x\, d\overline{\theta}^{+} d\theta^{+} \overline{\Lambda}\Lambda \\
\supset & \frac{1}{2} \int d^{2}x \times \left(2\overline{\lambda}\partial_{z}\lambda - 2\overline{G}G - 2\partial_{z}\overline{\lambda}\lambda\right) \\
= & \int d^{2}x \cdot 2\overline{\lambda}\partial_{z}\lambda - \overline{G}G
\end{aligned}
$$

第二步

对于E场，定义如下，$\overline{E}$要注意转置

$$
\begin{aligned}
E_{a}(\Phi_{i}) &= j_{ai_{1},i_{2},\dots,i_{q}}\Phi_{i_{1}}\dots\Phi_{i_{q}} \\
\Phi_{i} &= \phi_{i} + \sqrt{2}\theta^{+}\psi_{i} + 2\theta^{+}\overline{\theta}^{+}\partial_{z}\phi_{i}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
\overline{\Lambda} : \textcolor{purple}{\bullet}\overline{\lambda} - \sqrt{2}\overline{\theta}^{+}\overline{G} - 2\theta^{+}\overline{\theta}^{+}\partial_{z}\overline{\lambda} - \textcolor{pink}{\bullet}\ \textcolor{green}{\bullet}\ \sqrt{2}\theta^{+}\overline{E}
\tag{7}
$$

$$
\Lambda : \textcolor{pink}{\bullet}\lambda - \sqrt{2}\theta^{+}G + 2\theta^{+}\overline{\theta}^{+}\partial_{z}\lambda - \textcolor{purple}{\bullet}\ \textcolor{green}{\bullet}\ \sqrt{2}\overline{\theta}^{+}E
\tag{8}
$$

满足super field积分非零的双线性型的E场存在两种结合的方式, 由于E场已经伴随一个$\overline{\theta}^{+}$，另一个θ^{+}除了直接配对(绿色)还可以由E的展开（紫色粉色）得到。

$$
\frac{1}{2} \int d^{2}x d\overline{\theta}^{+} d\theta^{+} \cdot 2\theta^{+}\overline{E}\overline{\theta}^{+} E - \sqrt{2}\overline{\lambda}\overline{\theta}^{+} E - \sqrt{2}\theta^{+}\overline{E}\lambda
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{E}_{a}(\overline{\Phi}_{i}) &= \overline{\Phi}_{j_{q}}\cdots\overline{\Phi}_{j_{1}}\overline{j}_{aj_{1}\cdots j_{q}} \\
E_{a}(\Phi_{i}) &= j_{ai_{1}\cdots i_{q}}\Phi_{i_{1}}\cdots\Phi_{i_{q}}
\end{aligned}
$$

eqn (9) 积分第一部分：

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \phi + \sqrt{2}\theta^{+}\psi + 2\theta^{+}\overline{\theta}^{+}\partial_{z}\phi \\
\overline{\Phi} &= \overline{\phi} - \sqrt{2}\overline{\theta}^{+}\overline{\psi} - 2\theta^{+}\overline{\theta}^{+}\partial_{z}\overline{\phi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{\Lambda}^{0} \supset & \frac{1}{2} \int d^{2}x d\overline{\theta}^{+} d\theta^{+} \cdot 2\theta^{+}\overline{E}\overline{\theta}^{+} E \\
= & \frac{1}{2} \int d^{2}x d\overline{\theta}^{+} d\theta^{+} \cdot 2\theta^{+}\overline{\phi}_{j_{q}}\cdots\overline{\phi}_{j_{1}}\overline{j}_{aj_{1}\cdots j_{q}}\bar{\theta}^{+} j_{ai_{1}\cdots i_{q}}\phi_{i_{1}}\cdots\phi_{i_{q}} \\
= & \int d^{2}x\overline{j}_{aj_{1}\cdots j_{q}}\overline{\phi}_{j_{q}}\cdots\overline{\phi}_{j_{1}} \cdot j_{ai_{1}\cdots i_{q}}\phi_{i_{1}}\cdots\phi_{i_{q}} \\
\cong & \int d^{2}x\bar{B}^{a}B^{a} - i(j_{ai_{1}\dots i_{q}}B^{a}\phi_{i_{1}}\phi_{i_{2}}\dots\phi_{i_{q}} + \bar{j}_{ai_{1}\dots i_{q}}\bar{B}^{a}\bar{\phi}_{i_{1}}\bar{\phi}_{i_{2}}\dots\bar{\phi}_{i_{q}})
\end{aligned}
$$

Miao.W方法协调非线性的$J\ldots$部分

$$e^{-(\bar{j}_{ai_1\ldots i_q}\bar{\phi}_{i_1}\ldots\bar{\phi}_{i_q})(j_{ai_1\ldots i_q}\phi_{i_1}\ldots\phi_{i_q})} \sim \int DBD\bar{B}e^{-\bar{B}^a B^a + i(j_{ai_1\ldots i_q}B^a\phi_{i_1}\phi_{i_2}\ldots\phi_{i_q} + \bar{j}_{ai_1\ldots i_q}\bar{B}^a\bar{\phi}_{i_1}\bar{\phi}_{i_2}\ldots\bar{\phi}_{i_q})} \tag{10}$$

- Prove:

rhs 的鞍点是lhs，所以对应于$B^a, \bar{B}^a$on shell 的时候将得到lhs

$$-\delta\bar{B}^a B_a - \bar{B}_a\delta B^a + i(j_{ai_1\ldots i_q}\delta B^a\phi_{i_1}\phi_{i_2}\ldots\phi_{i_q} + \bar{j}_{ai_1\ldots i_q}\delta\bar{B}^a\bar{\phi}_{i_1}\bar{\phi}_{i_2}\ldots\bar{\phi}_{i_q}) = 0 \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\bar{B}_a &= ij_{ai_1\ldots i_q}\phi_{i_1}\phi_{i_2}\ldots\phi_{i_q} \\ B_a &= i\bar{j}_{ai_1\ldots i_q}\bar{\phi}_{i_1}\bar{\phi}_{i_2}\ldots\bar{\phi}_{i_q}\end{aligned} \tag{12}$$

eqn (9) 积分第二部分：

由于$\theta^+, \bar{\theta}^+$是格拉斯曼变量，所以只能在E中保留θ^+的一次项，也就是保留类似组合

$$\begin{gathered}\phi^{i_1} + \sqrt{2}\theta^+\psi^{i_1} \\ \phi^{i_2} + \sqrt{2}\theta^+\psi^{i_2} \\ \vdots \\ \phi^{i_q} + \sqrt{2}\theta^+\psi^{i_q}\end{gathered}$$

第二项的完整贡献是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int d^2x d\bar{\theta}^+ d\theta^+ \cdot -\sqrt{2}\bar{\lambda}\bar{\theta}^+ E \\ &= -\int d^2x d\bar{\theta}^+ d\theta^+ \cdot \bar{\lambda}\bar{\theta}^+\theta^+ j_{aj_1\cdots j_q}(\psi_{i_1}\phi_{i_2}\ldots\phi_{i_q} + \ldots + \phi_{i_1}\ldots\phi_{i_{q-1}}\psi_{i_q}) \\ &= \int d^2x j_{aj_1\cdots j_q}\bar{\lambda}(\psi_{i_1}\phi_{i_2}\ldots\phi_{i_q} + \ldots + \phi_{i_1}\ldots\phi_{i_{q-1}}\psi_{i_q})\end{aligned}$$

eqn (9) 积分第三部分：

$$\begin{gathered}\bar{\phi}^{j_q} - \sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\psi}^{j_q} \\ \bar{\phi}^{j_{q-1}} - \sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\psi}^{j_{q-1}} \\ \vdots \\ \bar{\phi}^{j_1} - \sqrt{2}\bar{\theta}^+\bar{\psi}^{j_1}\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int d^2x d\overline{\theta}^+ d\theta^+ \cdot -\sqrt{2}\theta^+\overline{E}\lambda \\
=&\frac{1}{2}\int d^2x d\overline{\theta}^+ d\theta^+ \cdot (-\sqrt{2}\theta^+)(-\sqrt{2}\overline{\theta}^+)\overline{j}_{aj_1\dots j_q}(\bar{\psi}_{j_q}\bar{\phi}_{j_{q-1}}\dots\bar{\phi}_{j_1}+\dots+\bar{\phi}_{j_q}\bar{\phi}_{j_{q-1}}\dots\bar{\psi}_{j_1})\lambda \\
=&\int d^2x \overline{j}_{aj_1\dots j_q}(\bar{\psi}_{j_q}\bar{\phi}_{j_{q-1}}\dots\bar{\phi}_{j_1}+\dots+\bar{\phi}_{j_q}\bar{\phi}_{j_{q-1}}\dots\bar{\psi}_{j_1})\lambda
\end{aligned}$$

完整 Action

$$\begin{aligned}
S^0 =& \int d^2x \cdot \left(-4\overline{\phi}\partial^2\phi + 2\overline{\psi}\partial\psi + 2\overline{\lambda}\partial_z\lambda - \overline{G}G\right) + \\
& \overline{j}_{aj_1\cdots j_q}\overline{\phi}_{j_q}\cdots\overline{\phi}_{j_1}\cdot j_{ai_1\cdots i_q}\phi_{i_1}\cdots\phi_{i_q} + \\
& j_{ai_1\cdots i_q}\bar{\lambda}(\psi_{i_1}\phi_{i_2}\dots\phi_{i_q}+\dots+\phi_{i_1}\dots\phi_{i_{q-1}}\psi_{i_q}) + \\
& \overline{j}_{aj_1\dots j_q}(\bar{\psi}_{j_q}\bar{\phi}_{j_{q-1}}\dots\bar{\phi}_{j_1}+\dots+\bar{\phi}_{j_q}\bar{\phi}_{j_{q-1}}\dots\bar{\psi}_{j_1})\lambda \\
\sim & \int d^2x \cdot \left(-4\overline{\phi}\partial^2\phi + 2\overline{\psi}\partial\psi + 2\overline{\lambda}\partial_z\lambda - \overline{G}G + \bar{B}B\right) + \\
& j_{ai_1\cdots i_q}\cdot\left(\bar{\lambda}(\psi_{i_1}\phi_{i_2}\dots\phi_{i_q}+\dots+\phi_{i_1}\dots\phi_{i_{q-1}}\psi_{i_q}) - iB^a\phi_{i_1}\phi_{i_2}\dots\phi_{i_q}\right) + \\
& \overline{j}_{aj_1\dots j_q}\cdot\left((\bar{\psi}_{j_q}\bar{\phi}_{j_{q-1}}\dots\bar{\phi}_{j_1}+\dots+\bar{\phi}_{j_q}\bar{\phi}_{j_{q-1}}\dots\bar{\psi}_{j_1})\lambda - i\bar{B}^a\bar{\phi}_{j_1}\bar{\phi}_{j_2}\dots\bar{\phi}_{j_q}\right)
\end{aligned}$$

B.$j_{ai_1\cdots i_q}$的系综平均

复高斯积分的讨论

$j_{\dots},\bar{j}_{\dots}$是共轭的复高斯变量, 计算时候拆分成实高斯变量$(x,y)$, 其中$x,y$是方差为$\sigma^2$，$\mu=0$的高斯分布

$$\begin{aligned}
j\dots &\to x\dots + iy\dots \\
\bar{j}\dots &\to x\dots - iy\dots
\end{aligned} \tag{13}$$

1. 讨论复高斯分布的系数问题

我们认为复高斯分布的权重是$\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$

- 在概率论的层面上，这个定义影响的的是归一化，但是在路径积分中，作用量部分不会受到常数归一化因子影响，于是在后续计算的过程中从$djd\bar{j}\to dxdy$无需考虑Jacobi 因子
- 对于使用什么样的权重形式$\frac{x^2+y^2}{s\sigma^2}$，本质上的影响在于我们如何定义$\sigma^2$，证明如下。 按照$s=2$的约定，$\langle j\bar{j}\rangle=2\sigma^2$，所以后文的$\sigma^2$应该代入$\frac{1}{2}\frac{(q-1)!J^2}{N^q}$

$$\begin{aligned}
\iint dxdy\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{s\sigma^2}\right) &= \pi s\sigma^2 \\
\iint dxdy\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{s\sigma^2}(x^2+y^2)\right) &= \pi s^2\sigma^4 \\
\langle j\dots\overline{j}^{\dots}\rangle &= s\sigma^2
\end{aligned} \tag{14}$$

2.$\prod \delta_{i,j}$以及指标配对

复变量积分的过程中隐含了指标配对，所以我们要在后续的积分中引入$\prod\limits_{ijkl} \delta_{ia,jb,kc,ld}$的原因。

Proof:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{abcd} \int dj_{abcd} d\bar{j}_{abcd} \exp\left(-j_{ijkl} X^{ijkl}\right) \exp\left(-\bar{j}_{i'j'k'l'} \overline{X}^{i'j'k'l'}\right) \times \text{weight} \\
=&\prod_{abcd} \exp(\cdots) \times \int dj_{abcd} d\bar{j}_{abcd} \left(\exp\left(-j_{abcd} X_{abcd} - \bar{j}_{abcd} \overline{X}_{abcd}\right) \times \text{weights}_{abcd} \right) \\
=&\prod_{abcd} \exp(\cdots) \times \exp\left(\text{Constant} \cdot (X_{abcd} + \overline{X}_{abcd})^2\right) \\
\cong&\prod_{abcd} \exp(\cdots) \times \exp\left((X_{abcd} + \overline{X}_{abcd}) \cdot (X_{a'b'c'd'} + \overline{X}_{a'b'c'd'}) \delta_{aa',bb',cc',dd'}\right)
\end{aligned}
$$

3.处理复高斯变量积分

我们要计算的量是$\langle \exp(-S) \rangle \sim \langle \exp\left(-jX - \bar{j}Y\right) \rangle$， 由于$X, Y$ 是某种不能随意交换顺序场，所以这里配成平方式进行讨论最为保险。

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-jX - \bar{j}Y\right) dx\, dy \tag{15}
$$

$$
\exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} - x(Y + X) - iy(X - Y)\right) \tag{16}
$$

按 x 和 y 分开积分得到

$$
(2\pi\sigma^2) \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}(Y + X)^2 - \frac{\sigma^2}{2}(X - Y)^2\right) \tag{17}
$$

整理一下指数部分：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2}{2}(Y + X)^2 - \frac{\sigma^2}{2}(X - Y)^2 \\
=&\frac{\sigma^2}{2}\left[(Y + X)^2 - (X - Y)^2\right] \\
=&\sigma^2(XY + YX)
\end{aligned}
$$

计算系综平均结果

由于我们只考虑相同场之间的缩并，不同类型场之间的缩并贡献为0，由此可以先着重计算$\psi\phi\cdots\phi$场的系综平均，再考虑$B\phi\cdots\phi$的系综平均。

1.$\psi\phi\cdots\phi$场的系综平均

$$\exp\left(-\int d^2z\cdot j_{ai_1\ldots i_q}\bar{\lambda}(\psi_{i_1}\phi_{i_2}\ldots\phi_{i_q}+\ldots+\phi_{i_1}\ldots\phi_{i_{q-1}}\psi_{i_q})+\right.$$
$$\left.\bar{j}_{aj_1\ldots j_q}(\bar{\psi}_{j_q}\bar{\phi}_{j_{q-1}}\ldots\bar{\phi}_{j_1}+\ldots+\bar{\phi}_{j_q}\bar{\phi}_{j_{q-1}}\ldots\bar{\psi}_{j_1})\lambda\right)$$

$$\int d^2z'\bar{\lambda}(\psi_{i_1}\phi_{i_2}\ldots\phi_{i_q}+\ldots+\phi_{i_1}\ldots\phi_{i_{q-1}}\psi_{i_q})\cdot\int d^2z(\bar{\psi}_{j_q}\bar{\phi}_{j_{q-1}}\ldots\bar{\phi}_{j_1}+\ldots+\bar{\phi}_{j_q}\bar{\phi}_{j_{q-1}}\ldots\bar{\psi}_{j_1})\lambda\prod\delta_{i_1,j_1}\ldots\delta_{i_q,j_q}+$$
$$\int d^2z(\bar{\psi}_{j_q}\bar{\phi}_{j_{q-1}}\ldots\bar{\phi}_{j_1}+\ldots+\bar{\phi}_{j_q}\bar{\phi}_{j_{q-1}}\ldots\bar{\psi}_{j_1})\lambda\cdot\int d^2z'\bar{\lambda}(\psi_{i_1}\phi_{i_2}\ldots\phi_{i_q}+\ldots+\phi_{i_1}\ldots\phi_{i_{q-1}}\psi_{i_q})\prod\delta_{i_1,j_1}\ldots\delta_{i_q,j_q}$$

在仍旧保留排序求和$\sum\limits_{\{i,j\}}$的意义下可以消除j指标，我们得到

$$=\iint d^2zd^2z'\sum_i\bar{\lambda}(\psi_{i_1}\phi_{i_2}\ldots\phi_{i_q}+\ldots+\phi_{i_1}\ldots\phi_{i_{q-1}}\psi_{i_q})|_{z'}(\bar{\psi}_{i_q}\bar{\phi}_{i_{q-1}}\ldots\bar{\phi}_{i_1}+\ldots+\bar{\phi}_{i_q}\bar{\phi}_{i_{q-1}}\ldots\bar{\psi}_{i_1})\lambda|_z+$$
$$\iint d^2zd^2z'\sum_i(\bar{\psi}_{i_q}\bar{\phi}_{i_{q-1}}\ldots\bar{\phi}_{i_1}+\ldots+\bar{\phi}_{i_q}\bar{\phi}_{i_{q-1}}\ldots\bar{\psi}_{i_1})\lambda|_z\bar{\lambda}(\psi_{i_1}\phi_{i_2}\ldots\phi_{i_q}+\ldots+\phi_{i_1}\ldots\phi_{i_{q-1}}\psi_{i_q})|_{z'}$$

- 通过路径积分用effective field改写场双线性型，也就是由路径积分引入的等价关系$\#\times G(z,z')\sim\sum\limits_a\bar{\Psi}^a(z)\Psi^a(z')\quad(\#=M,N)$允许我们进行相同指标的场的缩并。
- 精心的选取了z,z'的位置可以认为第一行表达式(在无害的交换四次费米子场后)与第二行等价。
    - 启示：写成这种形式其实我们每一项必须有偶数项费米子，倘若只保留λ i.e $\psi\to\phi$ 则第一行和第二行抵消因为费米子的可交换性抵消
- 顺序求和$\sum\limits_{1\le i_1\cdots i_q\le N}=\frac{1}{q!}\sum\limits_{1\le i_1\neq\cdots\neq i_q\le N}\Rightarrow\frac{1}{q!}\sum\limits_{\{i\}}$的约束项在全是费米子的情况下可以放松(由于$\psi^2=0$保证)，但是对于费米子与玻色子混合的复场认为在大N下**近似**成立。

于是我们认为$\int\mathcal{D}\Phi\mathcal{D}G\mathcal{D}\Sigma e^{-S}$ 中的指数部分含有

$$=\iint d^2zd^2z'\frac{1}{q!}\times\sigma^2\times 2q\times MG^{\bar{\lambda}}(z,z')NG^{\psi}(z,z')(NG^{\phi}(z))^{q-1}$$
$$=\iint d^2zd^2z'\frac{MN^q}{(q-1)!}\cdot\langle j\ldots\bar{j}\ldots\rangle\cdot G^{\bar{\lambda}}(z,z')G^{\psi}(z,z')G^{\phi}(z,z')^{q-1}$$

其中$G^{\bar{\lambda}}\sim M\lambda\bar{\lambda}$ 等效于考虑$\bar{\lambda}$场(而不是λ)的关联函数，后续会有更仔细的讨论。

2.$B\phi\cdots\phi$场的系综平均

进行与上面相同的讨论，需要计算的量是

$$\begin{aligned}&\iint d^2zd^2z'(iB^a\phi_{i_1}\phi_{i_2}\ldots\phi_{i_q})\times(i\bar{B}^a\bar{\phi}_{i_1}\bar{\phi}_{i_2}\ldots\bar{\phi}_{i_q})+\\&\iint d^2zd^2z'(i\bar{B}^a\bar{\phi}_{i_1}\bar{\phi}_{i_2}\ldots\bar{\phi}_{i_q})\times(iB^a\phi_{i_1}\phi_{i_2}\ldots\phi_{i_q})\end{aligned}\tag{18}$$

考虑这里的B,ϕ符合玻色统计，所以计算比上面简单，进行与上面相同的讨论得到

$$
-\iint d^2zd^2z'\frac{MN^q}{q!}\cdot\langle j\ldots\bar{j}\ldots\rangle\cdot G^B(z,z')(G^\phi(z,z'))^q \tag{19}
$$

如果我们考虑的$\langle j\ldots\bar{j}\ldots\rangle=\frac{(q-1)!J^2}{N^q}$与彭老师论文中设定一致，那么我们得到的完整的$G\Sigma$作用量是

$$
\begin{aligned}
S^0\sim&\int d^2z\cdot\left(-4\bar{\phi}\partial^2\phi+2\bar{\psi}\partial\psi+2\bar{\lambda}\partial\lambda-\bar{G}G+\bar{B}B\right)-\\
&\iint d^2zd^2z'MJ^2G^{\bar{\lambda}}(z,z')G^\psi(z,z')G^\phi(z,z')^{q-1}+\\
&\iint d^2zd^2z'\frac{J^2}{q}G^B(z,z')(G^\phi(z,z'))^q
\end{aligned}
$$

在路径积分中完整的exp指数是：

$$
\begin{aligned}
&-N\left(\Sigma^\psi(G^\psi-\frac{1}{N}\sum\bar{\psi}\psi)+\Sigma^\phi(G^\phi-\frac{1}{N}\sum\bar{\phi}\phi)\right)\\
&-M\left(\Sigma^{\bar{\lambda}}(G^{\bar{\lambda}}-\frac{1}{M}\sum\lambda\bar{\lambda})+\Sigma^B(G^B-\frac{1}{M}\sum\bar{B}B)\right)\\
&+\int d^2z\cdot\left(4\bar{\phi}\partial^2\phi-2\bar{\psi}\partial\psi-2\bar{\lambda}\partial\lambda+\bar{G}G-\bar{B}B\right)\\
&+\iint d^2zd^2z'MJ^2G^{\bar{\lambda}}(z,z')G^\psi(z,z')G^\phi(z,z')^{q-1}\\
&-\iint d^2zd^2z'\frac{J^2M}{q}G^B(z,z')(G^\phi(z,z'))^q
\end{aligned}
$$

至于这里为什么是N,M而不是$\frac{N}{2},\frac{M}{2}$的原因简单来说是因为我们考虑的是复场具有两个自由度，更多的讨论见附录。

C.Schwinger Dyson Eqn

1.第一组SD方程：

先考虑标量情况，我们的方程中会遇到复标量场的高斯积分。利用公式

$$
\prod\iint\mathcal{D}\bar{\phi}_i\,\mathcal{D}\phi_i\,e^{-\bar{\phi}_i\,h_{ij}\,\phi_j}=\frac{1}{\det(h)} \tag{20}
$$

对于spinor field，见https://zhuanlan.zhihu.com/p/680456212，积分结果对应于是$h\Rightarrow h^{-1}$

a. 第一组SD方程

$$
\begin{aligned}
&\iint\mathcal{D}\phi^\dagger\mathcal{D}\phi\exp\left(-\sum\phi^\dagger(\#-\Sigma)\phi-N\Sigma G+\cdots\right)\\
=&\exp\left(-N\ln(\det(\#-\Sigma))-N\Sigma G+\cdots\right)
\end{aligned}
$$

第一组SD方程是

$$G=\frac{1}{\#-\Sigma} \tag{21}$$

至于$\#$，最传统的方式是分部积分配凑双线性型然，结合Σ部分代入。这个操作cSYK与SYK相同。所以我们可以通过类比的方式快速得到。对此我们只需要调整蓝色区域对应的算符和系数就可以得到第一组SD方程。

$$\begin{aligned}
I=\int d^2x\left[\frac{1}{2}(\partial\phi^i)^2+\cdots\right]&\Rightarrow G=\frac{1}{-\partial^2-\Sigma}\\
I=\int d^2x\left[\frac{1}{2}\psi_i\partial\psi^i+\cdots\right]&\Rightarrow G=\frac{1}{\partial-\Sigma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^\phi&=\frac{1}{-8\partial^2-\Sigma^\phi}\\
G^\psi&=\frac{1}{4\partial-\Sigma^\psi}\\
G^\lambda&=\frac{1}{4\partial-\Sigma^\lambda}\\
G^B&=\frac{1}{2-\Sigma^B}
\end{aligned} \tag{22}$$

- Conformal region中需要我们扔掉非齐次项，所以统一写成 $G=-\frac{1}{\Sigma}$。(物理意义上对应于$w\ll J$其中$[J]=[E]$)
- 注意，这里的$G=\frac{1}{*-\Sigma}$在时间区域内的含义是$(*-\Sigma)\cdot G=\mathbb{1}$,傅里叶变换后的形式彼时$\partial\to w$。
- 注意，由于G场的第一个SD方程为$G^G=\frac{1}{-2-\Sigma^G}$,但是由于缺少耦合于$j\ldots$的$G$场，所以通过第二个SD方程可以知道on shell情况下$\Sigma^G=0$

2. 第二组SD方程

记$\frac{M}{N}\equiv\mu$

$$\Sigma^\psi=\mu J^2G^{\bar\lambda}(G^\phi)^{q-1} \tag{23}$$
$$\Sigma^\phi=J^2\mu\left((q-1)G^{\bar\lambda}G^\psi(G^\phi)^{q-2}-G^B\left(G^\phi\right)^{q-1}\right) \tag{24}$$
$$\Sigma^{\bar\lambda}=J^2G^\psi(G^\phi)^{q-1} \tag{25}$$
$$\Sigma^B=-\frac{J^2}{q}(G^\phi)^q \tag{26}$$

D.Conformal Weight

1. SD 方程组和G的Conformal Ansatz

考虑conformal solution，这就要求我们扔到第一组SD方程的非齐次项，得到共形近似的第一组SD方程：

$$G(w)\Sigma(w)=-1 \tag{27}$$

在壳的G的代表欧式空间的$\langle\psi\psi'\rangle$,且具有明显的共形性，所以我们的ansatz是CFT中两点关联函数的形式

$$G^i(z_1,z_2)=\frac{n_i}{(z_1-z_2)^{2h_i}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{2\tilde{h}_i}} \tag{28}$$

在引入Ansatz后我们可以简化SD方程中的一些形式，比如里面看上去很奇怪的$G_{\bar{\lambda}}\Sigma_\lambda$

1.a 关于复变函数的一个Remark

考察一个函数$f(z,\bar{z}):=z^x\bar{z}^x$, 求$f(-z,-\bar{z})$

- 解法1：
  - $f(z,\bar{z})=|z|^{2x}$ 所以$f(-z,-\bar{z})=f(z,\bar{z})$
- 解法2：
  - $f(-z,-\bar{z})=(-z)^x(-\bar{z})^x=-1^x\times\overline{(-1)}^x\times|z|^{2x}=(-1)^{2x}|z|^{2x}$

注意，第二种解法是错误的！错因如下，

$$\begin{aligned}\because -1&=e^{i\pi}\\ \therefore \overline{-1}&=e^{-i\pi}\\ \therefore -1^x\times\overline{(-1)}^x&=1\end{aligned} \tag{29}$$

所以这警示我们$(-z)^{2h_\Phi}(\overline{-z})^{2\tilde{h}_\Phi}=(-1)^{2h_\Phi-2\tilde{h}_\Phi}(z)^{2h_\Phi}(\bar{z})^{2\tilde{h}_\Phi}$而不是$(-1)^{2h_\Phi+2\tilde{h}_\Phi}(z)^{2h_\Phi}(\bar{z})^{2\tilde{h}_\Phi}$

1.b $G^{\bar{\Phi}}$与G^{Φ}的关系

On-Shell的时候，G就是两点函数

$$\begin{aligned}G^{\bar{\Phi}}(z_1,z_2)=&\langle\Phi(z_1)\bar{\Phi}(z_2)\rangle\\ =&(-1)^{2s}\langle\bar{\Phi}(z_2)\Phi(z_1)\rangle\\ =&(-1)^{2(h_\Phi-\tilde{h}_\Phi)}G^{\Phi}(z_2,z_1)\\ \therefore G^{\bar{\Phi}}(z)=&(-1)^{2(h_\Phi-\tilde{h}_\Phi)}G^{\Phi}(-z)\end{aligned}$$

对于我们这里考虑到Ansatz,我们有

$$\frac{n_{\bar{\Phi}}}{z^{2h_{\bar{\Phi}}}\bar{z}^{2\tilde{h}_{\bar{\Phi}}}}=(-1)^{2(h_\Phi-\tilde{h}_\Phi)}\frac{n_\Phi}{(-z)^{2h_\Phi}(\overline{-z})^{2\tilde{h}_\Phi}}=\frac{n_\Phi}{z^{2h_\Phi}\bar{z}^{2\tilde{h}_\Phi}} \tag{30}$$

于是我们可以得到

$$
\begin{gathered}
G^{\bar{\Phi}}(z)=G^{\Phi}(z)=(-1)^{2s}G^{\Phi}(-z) \\
h_{\bar{\Phi}}=h_{\Phi} \\
\tilde{h}_{\bar{\Phi}}=\tilde{h}_{\Phi} \\
n_{\bar{\Phi}}=n_{\Phi}
\end{gathered} \tag{31}
$$

所以我们可以在含相互作用部分的作用量做如下替换$G^{\bar{\lambda}}(z)\Rightarrow G^{\lambda}(z)$。这里将不再涉及$G^{\bar{\lambda}}$场，所以在做变分得到第一组SD方程的时候我们等效于将$\Sigma^{\bar{\lambda}}$替换为Σ^{λ}。于是简化后的SD方程可以写作

$$\Sigma^{\psi}=\mu J^2G^{\lambda}(G^{\phi})^{q-1} \tag{32}$$
$$\Sigma^{\phi}=J^2\mu\left((q-1)G^{\lambda}G^{\psi}(G^{\phi})^{q-2}-G^{B}\left(G^{\phi}\right)^{q-1}\right) \tag{33}$$
$$\Sigma^{\lambda}=J^2G^{\psi}(G^{\phi})^{q-1} \tag{34}$$
$$\Sigma^{B}=-\frac{J^2}{q}(G^{\phi})^{q} \tag{35}$$

2.2D Fourier Transform

依据第二组SD方程，Σ可以写成$\frac{n_{\Sigma}}{z^{2h_{\Sigma}}\bar{z}^{2\tilde{h}_{\Sigma}}}$以及其组合的形式,其中的conformal weight是$h_{\Sigma},\tilde{h}_{\Sigma}$。傅里叶变换后代入共形近似的第一组SD方程知，

$$\mathcal{F}[\frac{n_{\Sigma}}{z^{2h_{\Sigma}}\bar{z}^{2\tilde{h}_{\Sigma}}}]\mathcal{F}[\frac{n_{G}}{z^{2h_{G}}\bar{z}^{2\tilde{h}_{G}}}]=-1 \tag{36}$$
$$\mathcal{F}[\frac{n_{\Sigma}}{z^{2(1-h_{G})}\bar{z}^{2(1-\tilde{h}_{G})}}]\mathcal{F}[\frac{n_{G}}{z^{2h_{G}}\bar{z}^{2\tilde{h}_{G}}}]=-1 \tag{37}$$
$$(-1)^{2h_{G}-2\tilde{h}_{G}+1}\frac{n_{\Sigma}n_{G}\pi^2}{(2h_{G}-1)(2\tilde{h}_{G}-1)}=-1 \tag{38}$$

- 第二步参考王淼学长推导复平面傅里叶变换的过程，详见附录这里只给出结果。
- 第一步由第一组SD方程傅里叶变换后w的指数匹配得到关系

$$
\begin{gathered}
h_{\Sigma}+h_{G}=1 \\
\tilde{h}_{\Sigma}+\tilde{h}_{G}=1
\end{gathered} \tag{39}
$$

a.第一组SD方程的指数匹配关系：

通过上式，我们可以从第二组SD方程出得到独立的两组conformal weight的关系

$$
\begin{gathered}
h_{\psi}+h_{\lambda}+(q-1)h_{\phi}=1 \\
\tilde{h}_{\psi}+\tilde{h}_{\lambda}+(q-1)\tilde{h}_{\phi}=1 \\
h_{B}+qh_{\phi}=1 \\
\tilde{h}_{B}+q\tilde{h}_{\phi}=1
\end{gathered} \tag{40}
$$

b. 超对称变换给出的指数conformal weight和n_Φ关系

参考彭老师文章得到超对称变换下两点关联函数(也就是on-shell 的G场)的关系如下，

$$G^{\psi}(z_1, z_2) = -2\partial_1 G^{\phi}(z_1, z_2) = 2\partial_2 G^{\phi}(z_1, z_2) \tag{41}$$

代入Ansatz，对比$z, \bar{z}$指数和n，可以得到

$$\begin{aligned} n_\psi &= -4h_\phi n_\phi & (42)\\ h_\psi &= h_\phi + \frac{1}{2} & (43)\\ \tilde{h}_\psi &= \tilde{h}_\phi & (44) \end{aligned}$$

可以用$h_\phi, \tilde{h}_\phi$ 表示所有conformal weight

$$\begin{aligned} h_\lambda &= \frac{1}{2} - q h_\phi \\ \tilde{h}_\lambda &= 1 - q\tilde{h}_\phi \\ h_B &= 1 - q h_\phi \\ \tilde{h}_B &= 1 - q\tilde{h}_\phi \end{aligned} \tag{45}$$

c.得到h_ϕ和所有conformal weight

通过第二组SD方程的(1), (3)的傅里叶变换形式：

$$\pi^2 J^2 n_\psi n_\lambda n_\phi^{q-1} \cdot (-1)^{2h_\psi - 2\tilde{h}_\psi + 1} \cdot \frac{\mu}{(2h_\psi - 1)(2\tilde{h}_\psi - 1)} = -1 \tag{46}$$

$$\pi^2 J^2 n_\psi n_\lambda n_\phi^{q-1} \cdot (-1)^{2h_\lambda - 2\tilde{h}_\lambda + 1} \cdot \frac{1}{(2h_\lambda - 1)(2\tilde{h}_\lambda - 1)} = -1 \tag{47}$$

- 对由于粒子的$s = h - \bar{h}$，考虑到λ, ψ都是$s = \frac{1}{2}$,$(-1)^{2h - 2\tilde{h} + 1}$有相同影响。
- $\frac{\mu}{2h_\phi(2\tilde{h}_\phi - 1)} = \frac{1}{(1 - 2\tilde{h}_\phi q)(-2h_\phi q)}$ 我们认为ϕ是标量场，所以$h_\phi = \tilde{h}_\phi$ 不知道能不能通过推导得出来相等

$$\tilde{h}_\phi = h_\phi = \frac{\mu q - 1}{2\mu q^2 - 2}$$

$$\tilde{h}_\psi = \frac{\mu q - 1}{2\mu q^2 - 2} \qquad h_\psi = \frac{\mu q^2 + \mu q - 2}{2\mu q^2 - 2}$$

$$\tilde{h}_B = h_B = \frac{\mu q^2 + q - 2}{2\mu q^2 - 2}$$

$$\tilde{h}_\lambda = \frac{\mu q^2 + q - 2}{2\mu q^2 - 2} \qquad h_\lambda = \frac{q - 1}{2\mu q^2 - 2}$$

d.得到n关系

由上面讨论知 $n_{_\Sigma} n_{_G} = \frac{(-1)^{-2s}(2h_{_G} - 1)(2\tilde{h}_{_G} - 1)}{\pi^2}$,可以得到以下关系

$$n_\lambda n_\phi^q = -\frac{(q-1)q}{8\pi^2 J^2\left(\mu q^2-1\right)} \tag{48}$$

$$n_B n_\phi^q = -\frac{(q-1)^2 q}{4\pi^2 J^2\left(\mu q^2-1\right)^2} \tag{49}$$

- Remarks：
  可以观察到$n_B = 4\cdot\frac{q-1}{2(\mu q^2-1)}n_\lambda$,虽然$B$作为辅助场无法通过超对称变换直接检验该式。但值得注意到是该式与超对称变换结果非常相似。
  - SD方程组中如果 **做如下替换**：$n_B \Leftrightarrow -n_G, \tilde{h}_B \Leftrightarrow \tilde{h}_G, h_B \Leftrightarrow h_G, \Sigma^B = -\Sigma^G$ 可以在相差一个2系数的情况下得到彭老师论文中$E=0$ SYK的SD方程组。
  - 此外，上述关系描述的$n_G = -4h_\lambda n_\lambda$，正是超对称变换$G^G(z_1,z_2) = -2\partial_1 G^\lambda(z_1,z_2)$给出的超对称结果。

  所以这里的B场虽然只是辅助场，但是行为上表现的和Fermionic Superfield中的G场非常相似。

E. Four Points Function

0.Kernel与四点函数的关系

我们知道在大N极限下，四点函数的非平庸的领头阶贡献来源于各种长度的梯子图的加和。参考Maldacena的写法：$\mathcal{F}=\mathcal{F}_0+\mathcal{F}_1+\cdots$，由于

$$\mathcal{F}_{n+1}(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4)=\int d\tau d\tau'\, K(\tau_1,\tau_2;\tau,\tau')\mathcal{F}_n(\tau,\tau',\tau_3,\tau_4) \tag{1}$$

如果我们定义的矩阵乘法为$\iint d\tau d\tau'$那么我们形式上可以将上述递推公式写作$\mathcal{F}_{n+1}=K\cdot\mathcal{F}_n$。于是我们可以得到四点函数的表达式

$$\mathcal{F}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_n=\sum_{n=0}^{\infty}K^n\mathcal{F}_0=\frac{1}{1-K}\mathcal{F}_0. \tag{2}$$

也就是

$$\mathcal{F}(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4)=\iint d\tau d\tau'\ (\mathbb{1}-K)^{-1}(\tau_1,\tau_2,\tau,\tau')\cdot\mathcal{F}(\tau,\tau',\tau_3,\tau_4) \tag{3}$$

我认为$\mathbb{1}(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4)=\delta(\tau_1-\tau_3)\times\delta(\tau_2-\tau_4)$?

1.我们关注的四点函数

在我们的模型中，我们主要关注的四点函数是$\langle\bar{\phi}^i\phi^i\bar{\phi}^j\phi^j\rangle$但是他会与下面类型的四点函数进行混合。怎么理解混合？

混合的关联函数形如$\langle\bar{\Phi}\Phi|\bar{\Psi}\Psi\rangle$。物理上代表复场的二次型经过相互作用变成了另一种场的二次型。考虑的这一大类四点函数需要计算相关Kernel，计算的方式为计算$\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0$($\mathcal{F}_1$对应于梯子图的一圈修正)，形式上记为$K^{\Phi\Psi}$

$$
\begin{gathered}
\langle\bar{\phi}^i\phi^i\bar{\phi}^j\phi^j\rangle \\
\langle\bar{\phi}^i\phi^i\bar{\psi}^j\psi^j\rangle \\
\langle\bar{\phi}^i\phi^i\bar{\lambda}^j\lambda^j\rangle \\
\langle\bar{\phi}^i\phi^i\bar{B}^jB^j\rangle \\
\langle\bar{\psi}^i\psi^i\bar{\lambda}^j\lambda^j\rangle \\
\langle\bar{\psi}^i\psi^i\bar{\phi}^j\phi^j\rangle \\
\langle\bar{\lambda}^i\lambda^i\bar{\psi}^j\psi^j\rangle \\
\langle\bar{\lambda}^i\lambda^i\bar{\phi}^j\phi^j\rangle \\
\langle\bar{B}^iB^i\bar{\phi}^j\phi^j\rangle
\end{gathered} \tag{4}
$$

2. Kernel的费曼图以及表达式

可以形式上将Kernel的计算写成一种截腿的关联函数。我们需要计算的量如下:

$$
\frac{1}{\#_i\times\#_j}\sum_{ij}\iint d\bar{j}dj\langle\overline{\Phi}^i|\hat{H}^j_{int}(j,\bar{j})\hat{H}^j_{int}(j,\bar{j})|\Phi^i\rangle\times e^{-\frac{-j\bar{j}}{2\sigma^2}} \tag{5}
$$

其中$j,\bar{j}$代表复高斯变量$j_{ai_1\cdots i_q},\bar{j}_{ai_1\cdots i_q}$,$\hat{H}^j_{int}$代表$H_{int}/\Psi_j,\overline{\Psi}_j$这些因子在完整的计算中提供$\langle j\ldots\bar{j}\ldots\rangle$因子，指标配对(内容大致和前面一样,这里不再论述)。$\#_{ij}$代表M,N将提供正确的N-counting，后面会仔细讨论。出于简化问题的目的，我们将$\hat{H}_{int}$ 分成holomorphic 和 anti holomorphic 部分 $\overline{H}_{int},H_{int}$。所以Kernel的计算实际上是

$$
\iint d^2j\ \langle\overline{H}H\rangle+\langle H\overline{H}\rangle \tag{6}
$$

回顾我们关心的作用量，蓝色部分分别包含了$H_{\lambda,G},\overline{H}_{\bar{\lambda},\bar{G}}$。这里我们着重分析$\langle\overline{H}H\rangle$,而$\langle H\overline{H}\rangle$将作为另一个Channel单独讨论。

$$
\begin{aligned}
S^0\sim\int d^2x\cdot&\left(-4\bar{\phi}\partial^2\phi+2\bar{\psi}\partial\psi+2\bar{\lambda}\partial_z\lambda-\overline{G}G+\bar{B}B\right)+\\
&j_{ai_1\cdots i_q}\cdot\left(\bar{\lambda}(\psi_{i_1}\phi_{i_2}\ldots\phi_{i_q}+\ldots+\phi_{i_1}\ldots\phi_{i_{q-1}}\psi_{i_q})-iB^a\phi_{i_1}\phi_{i_2}\ldots\phi_{i_q}\right)+\\
&\bar{j}_{aj_1\ldots j_q}\cdot\left((\bar{\psi}_{j_q}\bar{\phi}_{j_{q-1}}\ldots\bar{\phi}_{j_1}+\ldots+\bar{\phi}_{j_q}\bar{\phi}_{j_{q-1}}\ldots\bar{\psi}_{j_1})\lambda-i\bar{B}^a\bar{\phi}_{j_1}\bar{\phi}_{j_2}\ldots\bar{\phi}_{j_q}\right)
\end{aligned}
$$

通过费曼图的计算，我们得到如下Kernel的表达式:

$$
\begin{aligned}
K^{\phi\phi}(z_1,z_2,z_3,z_4) &= -(q-1)J^2\frac{M}{N}G^{\phi}(z_{13})G^{\bar{\phi}}(z_{24})G^{B}(z_{34})(G^{\phi}(z_{34}))^{q-2} \\
&\qquad +(q-1)(q-2)J^2\frac{M}{N}G^{\phi}(z_{13})G^{\bar{\phi}}(z_{24})G^{\psi}(z_{34})G^{\bar{\lambda}}(z_{34})(G^{\phi}(z_{34}))^{q-3} \\
K^{\phi\phi}(z_1,z_2,z_3,z_4) &= (q-1)J^2\frac{M}{N}G^{\phi}(z_{13})G^{\bar{\phi}}(z_{24})G^{\bar{\lambda}}(z_{34})(G^{\phi}(z_{34}))^{q-2} \\
K^{\phi\bar{\lambda}}(z_1,z_2,z_3,z_4) &= (q-1)J^2G^{\phi}(z_{13})G^{\bar{\phi}}(z_{24})G^{\psi}(z_{34})(G^{\phi}(z_{34}))^{q-2} \\
K^{\phi G}(z_1,z_2,z_3,z_4) &= -J^2G^{\phi}(z_{13})G^{\bar{\phi}}(z_{24})(G^{\phi}(z_{34}))^{q-1} \\
K^{\psi\phi}(z_1,z_2,z_3,z_4) &= -(q-1)J^2\frac{M}{N}G^{\psi}(z_{13})G^{\bar{\psi}}(z_{24})G^{\bar{\lambda}}(z_{34})(G^{\phi}(z_{34}))^{q-2} \\
K^{\psi\bar{\lambda}}(z_1,z_2,z_3,z_4) &= -J^2G^{\psi}(z_{13})G^{\bar{\psi}}(z_{24})(G^{\phi}(z_{34}))^{q-1} \\
K^{\bar{\lambda}\phi}(z_1,z_2,z_3,z_4) &= -(q-1)J^2\frac{M}{N}G^{\bar{\lambda}}(z_{13})G^{\lambda}(z_{24})G^{\psi}(z_{34})(G^{\phi}(z_{34}))^{q-2} \\
K^{\bar{\lambda}\psi}(z_1,z_2,z_3,z_4) &= -J^2G^{\bar{\lambda}}(z_{13})G^{\lambda}(z_{24})(G^{\phi}(z_{34}))^{q-1} \\
K^{G\phi}(z_1,z_2,z_3,z_4) &= -J^2\frac{M}{N}G^{B}(z_{13})G^{\bar{B}}(z_{24})(G^{\phi}(z_{34}))^{q-1}
\end{aligned}
$$

- 详细的费曼图推导前面的因子详见附录。
- 这里负号有两种来源。
  - 来源1：为了保证传播子$G^{\Psi},G^{\overline{\Psi}}$按照正确顺序连接，从费曼图可以看出我们交换场和共轭场的位置。费曼图上看就是交叉up and down rail。我们只用选择顶点的一侧进行处理，在关于Kernel的计算过程中我们选择对Kernel左侧的rail进行交叉。所以$K^{\Psi\Phi}$因为入态是费米子算符所以会携带一个负号以保证正确连接Kernel。
  - 来源2：注意到B场顶点携带i因子，所以该类Kernel也会携带一个负号。
- 这里的$G^{\bar{\lambda}}$以及$G^{\bar{\Phi}}(z_{24})$的讨论：由于我们在之前地方讨论的G^{Φ}的Ansatz的对称性可以直接写为G^{Φ}无论Φ场是否为费米子场。上面公式保留形式是为了保证与费曼图的一致性，于是可以简化为下式

$$K^{\phi\phi}(z_1,z_2,z_3,z_4) = -(q-1)J^2\frac{M}{N}G^{\phi}(z_{13})G^{\phi}(z_{24})G^{B}(z_{34})(G^{\phi}(z_{34}))^{q-2} \tag{7}$$

$$+(q-1)(q-2)J^2\frac{M}{N}G^{\phi}(z_{13})G^{\phi}(z_{24})G^{\psi}(z_{34})G^{\lambda}(z_{34})(G^{\phi}(z_{34}))^{q-3} \tag{8}$$

$$K^{\phi\psi}(z_1,z_2,z_3,z_4) = (q-1)J^2\frac{M}{N}G^{\phi}(z_{13})G^{\phi}(z_{24})G^{\lambda}(z_{34})(G^{\phi}(z_{34}))^{q-2} \tag{9}$$

$$K^{\phi\lambda}(z_1,z_2,z_3,z_4) = (q-1)J^2G^{\phi}(z_{13})G^{\phi}(z_{24})G^{\psi}(z_{34})(G^{\phi}(z_{34}))^{q-2} \tag{10}$$

$$K^{\phi B}(z_1,z_2,z_3,z_4) = -J^2G^{\phi}(z_{13})G^{\phi}(z_{24})(G^{\phi}(z_{34}))^{q-1} \tag{11}$$

$$K^{\psi\phi}(z_1,z_2,z_3,z_4) = -(q-1)J^2\frac{M}{N}G^{\psi}(z_{13})G^{\psi}(z_{24})G^{\lambda}(z_{34})(G^{\phi}(z_{34}))^{q-2} \tag{12}$$

$$K^{\psi\lambda}(z_1,z_2,z_3,z_4) = -J^2G^{\psi}(z_{13})G^{\psi}(z_{24})(G^{\phi}(z_{34}))^{q-1} \tag{13}$$

$$K^{\lambda\phi}(z_1,z_2,z_3,z_4) = -(q-1)J^2\frac{M}{N}G^{\lambda}(z_{13})G^{\lambda}(z_{24})G^{\psi}(z_{34})(G^{\phi}(z_{34}))^{q-2} \tag{14}$$

$$K^{\lambda\psi}(z_1,z_2,z_3,z_4) = -J^2\frac{M}{N}G^{\lambda}(z_{13})G^{\lambda}(z_{24})(G^{\phi}(z_{34}))^{q-1} \tag{15}$$

$$K^{B\phi}(z_1,z_2,z_3,z_4) = -J^2\frac{M}{N}G^{B}(z_{13})G^{B}(z_{24})(G^{\phi}(z_{34}))^{q-1} \tag{16}$$

3.Kernel的本征值

3.1 Kernel的本征函数的讨论

我们推测本征函数的形式以及本征值有如下形式

$$\begin{gathered}\Phi^i(z_1,z_2)=(z_{12})^{h-2h_i}(\bar{z}_{12})^{\tilde{h}-2\tilde{h}_i},\quad i=\phi,\psi,\lambda,G\\ K^{(ij)}*\Phi^j=k^{ij}\Phi^i.\end{gathered}\tag{17}$$

我们可以验证这确实是本征函数的形式

验证:

- 首先回顾在最开始计算Conformal weight为了匹配傅里叶变换后的w的指数平衡，我们需要引入

$$\begin{gathered}1=h_\lambda+h_\psi+(q-1)h_\phi\\ 1=h_B+q\cdot h_\phi\end{gathered}\tag{18}$$

当我们按照下面公式计算的时候，我们关注

系数计算过程

由于我们要处理的本征值函数的积分是

$$\iint d^2z_3d^2z_4\ K^{(ij)}(z_1,z_2,z_3,z_4)\Phi^j(z_3,z_4)=k^{ij}\Phi^i(z_1,z_2)\tag{19}$$

而且观察上述K^{ij}的形式可知 (其中h^*，$\tilde{h}^*$代表两个rail之间的格林函数的累计权重)

$$K^{ij}*\Phi^j\cong\#\times z_{13}^{-2h_i}\bar{z}_{13}^{-2\tilde{h}_i}\cdot z_{24}^{-2h_i}\bar{z}_{24}^{-2\tilde{h}_i}\cdot z_{34}^{h-2h_j-2h^*}\bar{z}_{34}^{\tilde{h}-2\tilde{h}_j-2\tilde{h}^*}\tag{20}$$

利用公式可以处理积分

$$\begin{aligned}&\int d^2y(y-t_0)^{a+n}(\bar{y}-\bar{t}_0)^a(t_1-y)^{b+m}(\bar{t}_1-\bar{y})^b\\ &=(t_0-t_1)^{a+n+b+m+1}(\bar{t}_0-\bar{t}_1)^{a+b+1}\quad\times\\ &\quad\pi\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(-a-b-m-n-1)}{\Gamma(a+b+2)\Gamma(-a-n)\Gamma(-b-m)}\end{aligned}$$

3.2 积分处理

第一步先积$z_3, \bar{z}_3$ 直接替换

$$
\begin{gathered}
t_0 \Rightarrow z_4, t_1 \Rightarrow z_1, \\
m \Rightarrow -2(h_i - \tilde{h}_i), b \Rightarrow -2\tilde{h}_i, \\
a \Rightarrow \tilde{h} - 2\tilde{h}_j - 2\tilde{h}^* \\
n \Rightarrow (h - \tilde{h}) - 2(h^* - \tilde{h}^*) - 2(h_j - \tilde{h}_j)
\end{gathered}
$$

得到的函数形式为:

$$
z_{41}^{h-2h_j-2h_i-2h^*+1} \bar{z}_{41}^{\tilde{h}-2\tilde{h}_j-\tilde{h}_i-2\tilde{h}^*+1} \cdot z_{24}^{-2h_i} \bar{z}_{24}^{-2\tilde{h}_i} \tag{21}
$$

第二步积分$z_4, \bar{z}_4$ 直接替换

$$
\begin{gathered}
t_0 \Rightarrow z_1, t_1 \Rightarrow z_2, \\
b \Rightarrow -2\tilde{h}_i, m \Rightarrow -2(h_i - \tilde{h}_i) \\
a \Rightarrow \tilde{h} - 2\tilde{h}_j - 2\tilde{h}_i - 2\tilde{h}^* + 1 \\
n \Rightarrow (h - \tilde{h}) - 2(h^* - \tilde{h}^*) - 2(h_j - \tilde{h}_j) - 2(h_i - \tilde{h}_i),
\end{gathered}
$$

积分后得到的函数形式为

$$
z_{12}^{h-2h_i+(2-2h_j-2h_i-2h^*)} \bar{z}_{12}^{\tilde{h}-2\tilde{h}_i+(2-2\tilde{h}_j-2\tilde{h}_i-2\tilde{h}^*)} \tag{22}
$$

3.3 顶点Conformal Weight 关系式的讨论

记得通过之前傅里叶变换计算conformal weight引入的w平衡关系我们有如下关系式

$$
\begin{gathered}
1 = h_\lambda + h_\psi + (q-1)h_\phi \\
1 = h_B + q \cdot h_\phi
\end{gathered} \tag{23}
$$

该关系的另一种解读是得到每一个顶点连接的所有green function，满足conformal weight归一。

于是结合我们上面的分析得到Kernel中有如下关系$2 - 2h_j - 2h_i - 2h^* = 0$.于是我们最终得到的函数形式为$z_{12}^{h-2h_i} \bar{z}_{12}^{\tilde{h}-2\tilde{h}_i}$从而验证上面本征函数形式正确。所以计算本征值的过程中我们只需要计算两组$F[a, b, m, n] = \pi \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(-a-b-m-n-1)}{\Gamma(a+b+2)\Gamma(-a-n)\Gamma(-b-m)}$的乘积。

形式上我们将复杂卷积的被积函数记为$K^{ij}\Phi = z_{13}^X z_{24}^Y z_{34}^Z \cdot \bar{z}_{13}^{\tilde{X}} \bar{z}_{24}^{\tilde{Y}} \bar{z}_{34}^{\tilde{Z}}$。由于观察到holomorphic和anti holomorphic部分的conformal weight具有形式上的对称性，也就是$z_{12}^f \bar{z}_{12}^g$满足$g = \tilde{f}$(也就是在我们得到$h, \tilde{h}$后，计算全纯和反全纯函数的操作具有上一致性)。我们在附录A中编写了简化代码，只用输入$h, \tilde{h}$的数组以及conformal weight X, Y, Z即可交给Mathematica计算该结果

$$F[\tilde{Z},\tilde{X},X-\tilde{X},Z-\tilde{Z}]\cdot F[\tilde{X}+\tilde{Z}+1,\tilde{Y},Y-\tilde{Y},Z+X-\tilde{Z}-\tilde{X}] \tag{24}$$

3.4.本征值计算结果

$$k^{\phi\phi}=\frac{\mu(q-1)^2q(\mu q^2-2\mu q+1)\Gamma\left(\frac{(q-1)q\mu}{q^2\mu-1}\right)^2\Gamma\left(-\frac{h\mu q^2+\mu q+h-1}{q^2\mu-1}\right)\Gamma\left(\tilde{h}-\frac{(q-1)q\mu}{q^2\mu-1}\right)}{4(\mu q^2-1)^2\Gamma\left(\frac{q\mu-1}{q^2\mu-1}\right)^2\Gamma\left(\frac{h\mu q^2-2\mu q^2+\mu q-h+1}{1-q^2\mu}\right)\Gamma\left(\tilde{h}+\frac{(q-1)q\mu}{q^2\mu-1}\right)} \tag{25}$$

$$k^{\phi\psi}=-\frac{\mu(q-1)^2q\Gamma\left(\frac{(q-1)q\mu}{q^2\mu-1}\right)^2\Gamma\left(\frac{-h\mu q^2+\mu q+h-1}{q^2\mu-1}\right)\Gamma\left(\tilde{h}-\frac{(q-1)q\mu}{q^2\mu-1}\right)}{8(\mu q^2-1)\Gamma\left(\frac{q\mu-1}{q^2\mu-1}\right)^2\Gamma\left(\frac{h\mu q^2-2\mu q^2+\mu q-h+1}{1-q^2\mu}\right)\Gamma\left(\tilde{h}+\frac{(q-1)q\mu}{q^2\mu-1}\right)} \tag{26}$$

$$k^{\phi\lambda}=-\frac{2\pi^2J^2(q-1)n_\phi^{q+1}(\mu q-1)\Gamma\left(\frac{(q-1)q\mu}{q^2\mu-1}\right)^2\Gamma\left(\frac{-h\mu q^2+\mu q+h-1}{q^2\mu-1}\right)\Gamma\left(\tilde{h}-\frac{(q-1)q\mu}{q^2\mu-1}\right)}{(\mu q^2-1)\Gamma\left(\frac{q\mu-1}{q^2\mu-1}\right)^2\Gamma\left(\frac{h\mu q^2-2\mu q^2+\mu q-h+1}{1-q^2\mu}\right)\Gamma\left(\tilde{h}+\frac{(q-1)q\mu}{q^2\mu-1}\right)} \tag{27}$$

$$k^{\phi B}=-\frac{\pi^2J^2n_\phi^{q+1}\Gamma\left(\frac{(q-1)q\mu}{q^2\mu-1}\right)^2\Gamma\left(\frac{-h\mu q^2+\mu q+h-1}{q^2\mu-1}\right)\Gamma\left(\tilde{h}-\frac{(q-1)q\mu}{q^2\mu-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{q\mu-1}{q^2\mu-1}\right)^2\Gamma\left(\frac{h\mu q^2-2\mu q^2+\mu q-h+1}{1-q^2\mu}\right)\Gamma\left(\tilde{h}+\frac{(q-1)q\mu}{q^2\mu-1}\right)} \tag{28}$$

$$k^{\psi\phi}=\frac{\mu(q-1)^2q(\mu q-1)^2\Gamma\left(\frac{(q-1)q\mu}{q^2\mu-1}\right)^2\Gamma\left(\frac{-h\mu q^2+\mu q^2+\mu q+h-2}{q^2\mu-1}\right)\Gamma\left(\tilde{h}-\frac{(q-1)q\mu}{q^2\mu-1}\right)}{2(\mu q^2-1)^3\Gamma\left(\frac{\mu q^2+\mu q-2}{q^2\mu-1}\right)^2\Gamma\left(\frac{-h\mu q^2+(q-1)\mu q+h}{q^2\mu-1}\right)\Gamma\left(\tilde{h}+\frac{(q-1)q\mu}{q^2\mu-1}\right)} \tag{29}$$

$$k^{\psi\lambda}=-\frac{4\pi^2J^2n_\phi^{q+1}(\mu q-1)^2\Gamma\left(\frac{(q-1)q\mu}{q^2\mu-1}\right)^2\Gamma\left(\frac{-h\mu q^2+\mu q^2+\mu q+h-2}{q^2\mu-1}\right)\Gamma\left(\tilde{h}-\frac{(q-1)q\mu}{q^2\mu-1}\right)}{(\mu q^2-1)^2\Gamma\left(\frac{\mu q^2+\mu q-2}{q^2\mu-1}\right)^2\Gamma\left(\frac{-h\mu q^2+(q-1)\mu q+h}{q^2\mu-1}\right)\Gamma\left(\tilde{h}+\frac{(q-1)q\mu}{q^2\mu-1}\right)} \tag{30}$$

$$k^{\lambda\phi}=\frac{\mu(q-1)^3q^2n_\phi^{-q-1}(\mu q-1)\Gamma\left(\frac{1-q}{q^2\mu-1}\right)^2\Gamma\left(\frac{-h\mu q^2+q+h-1}{q^2\mu-1}\right)\Gamma\left(\frac{q+\tilde{h}(q^2\mu-1)-1}{q^2\mu-1}\right)}{32\pi^2J^2(\mu q^2-1)^3\Gamma\left(\frac{q-1}{q^2\mu-1}\right)^2\Gamma\left(\frac{-h\mu q^2+2\mu q^2-q+h-1}{q^2\mu-1}\right)\Gamma\left(\frac{-q+\tilde{h}(q^2\mu-1)+1}{q^2\mu-1}\right)} \tag{31}$$

$$k^{\lambda\psi}=-\frac{\mu(q-1)^2q^2n_\phi^{-q-1}\Gamma\left(\frac{1-q}{q^2\mu-1}\right)^2\Gamma\left(\frac{-h\mu q^2+q+h-1}{q^2\mu-1}\right)\Gamma\left(\frac{q+\tilde{h}(q^2\mu-1)-1}{q^2\mu-1}\right)}{64\pi^2J^2(\mu q^2-1)^2\Gamma\left(\frac{q-1}{q^2\mu-1}\right)^2\Gamma\left(\frac{-h\mu q^2+2\mu q^2-q+h-1}{q^2\mu-1}\right)\Gamma\left(\frac{-q+\tilde{h}(q^2\mu-1)+1}{q^2\mu-1}\right)} \tag{32}$$

$$k^{B\phi}=-\frac{\mu(q-1)^4q^2n_\phi^{-q-1}\Gamma\left(\frac{1-q}{q^2\mu-1}\right)^2\Gamma\left(\frac{-h\mu q^2+\mu q^2+q+h-2}{q^2\mu-1}\right)\Gamma\left(\frac{q+\tilde{h}(q^2\mu-1)-1}{q^2\mu-1}\right)}{16\pi^2J^2(\mu q^2-1)^4\Gamma\left(\frac{\mu q^2+q-2}{q^2\mu-1}\right)^2\Gamma\left(\frac{-h\mu q^2+\mu q^2-q+h}{q^2\mu-1}\right)\Gamma\left(\frac{-q+\tilde{h}(q^2\mu-1)+1}{q^2\mu-1}\right)} \tag{33}$$

3.5 Kernel的系数讨论与对比

- 由于S_{int}缺少$\sqrt{2}$，所以Kernel整体会少了2倍。更高的倍数会由于n-factor的2因子的缺失，即$n_\lambda n_\phi^q, n_B n_\phi^q$都少2;以及$-iB$的顶点因子还有$n_B=-n_G$，这些将导致这里计算的Kernel与彭老师计算结果有一个倍数的差异：

  $K^{\phi\phi}$：我的计算结果比彭老师的小4倍, 对应于K包含一个$n_\lambda n_\phi^q$和$n_B n_\phi^q$因子；同时由于Kernel$K$顶点的i^2与$n_G=-n_B$抵消，所以尽管该Kernel存在两部分贡献，但本征值结果只差一个整体倍数。

  $K^{\phi\psi}$：我的计算结果比彭老师的小4倍，对应于K包含一个$n_\lambda n_\phi^q$因子。

  $K^{\phi\lambda}$：我的计算结果比彭老师的小2倍，对应于K包含不受影响的n_ϕ^{q+1}因子。

  $K^{\phi B}$：我的计算结果比彭老师的小-2倍，对应于新的顶点引入$(-i)^2$以及不受影响的n_ϕ^{q+1}因子。

  $K^{\psi\phi}$：我的计算结果比彭老师的小$-$4倍，对应于K包含一个$n_\lambda n_\phi^q$因子。

  $K^{\psi\lambda}$：我的计算结果比彭老师的小$-$2倍，对应于K包含不受影响的n_ϕ^{-q-1}因子

  $K^{\lambda\phi}$：我的计算结果比彭老师的小$-$8倍, 对应于K包含一个$(n_\lambda n_\phi^q)^2$因子

  $K^{\lambda\psi}$：我的计算结果比彭老师的小$-$8倍, 对应于K包含一个$(n_\lambda n_\phi^q)^2$因子

  $K^{B\phi}$：我的计算结果比彭老师的小-8倍, 对应于K包含一个$(n_B n_\phi^q)^2$因子，而顶点$(-i)^2=-1$

  - 其中红色部分是计算对不上彭老师的计算中2.19-3.22的符号。但是与我复现的计算结果一致。 怀疑这里的正负号存在问题。

3.6另一个Channel

由于我们只讨论了$\langle\tilde{H}H\rangle$对应的四点函数，还有$\langle H\tilde{H}\rangle$也有同样的贡献。对应的描述是$\Phi\Rightarrow\overline{\Phi}$。由于$B\phi\ldots\phi$场的$i$因子源自路径积分，并不会因为$H$的共轭而改变；此外我们知道$G^\Phi=G^{\overline{\Phi}}$；所以我们考虑的“共轭”channel的Kernel表达式与原来一致。

但是通过费曼图分析，两个Channel会交换复场的方向。所以将我们的原来讨论的Hilbert Space中的基扩大一倍也就是引入共轭的解，同时所以引入$\sigma=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$张量积上原来的Kernel矩阵来表示Channel会交换两种不同类型场的性质。

注意，在Kernel中引入交换两个rail产生的$(-1)^F$我理解为是该算符的本征函数固有的属性，与扩大Hilbert Space无关。

F.Chaotic Behavior

0.共形场论的基本推导

0.1有限温度两点函数

现在即将从欧式时间转换成实时间的讨论。对此，第一步是将一个欧式时间维度紧致化，这里选择紧致的周期是$\beta = 2\pi$，对应的映射是$f(z) = e^w = e^{x+i\frac{2\pi}{\beta}\tau}$。

一个conformal weight是$(h, \tilde{h})$的primary field满足共形变换

$$\Phi(z, \bar{z}) \mapsto \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-h} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)^{-\bar{h}} \Phi(w, \bar{w}) \tag{1}$$

我们研究的传播子，也就是两点函数，以及对应的Ansatz如下（这里的$\mathbb{C}$代表处于复平面）

$$\langle \Phi(z_1, \bar{z}_1)\Phi(z_2, \bar{z}_2)\rangle_{\mathbb{C}} = \frac{n}{(z_1 - z_2)^{2h}(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{2\bar{h}}} \tag{2}$$

经过共形变换后我们得到

$$\langle \phi(w_1, \bar{w}_1)\phi(w_2, \bar{w}_2)\rangle_{\text{cylinder}} = \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{2h+2\bar{h}} \cdot \frac{n}{\left[2\sinh\left(\frac{\pi}{\beta}(w_1 - w_2)\right)\right]^{2h}\left[2\sinh\left(\frac{\pi}{\beta}(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)\right)\right]^{2\bar{h}}}$$
$$\Downarrow$$
$$G_{th}(\tau_1, x_1, \tau_2, x_2) = \frac{n}{\left(2\sinh\left(\frac{x_{12}+i\tau_{12}}{2}\right)\right)^{2h}\left(2\sinh\left(\frac{x_{12}-i\tau_{12}}{2}\right)\right)^{2\bar{h}}}$$

0.2 Thermal Correlator延拓得到Retarded Correlator

一般的Retarded关联函数的定义如下，其中±代表对易关系和反对易关系。

$$G_R(x, t; x', t') \equiv -i\theta(t - t')\langle[\psi(x, t), \psi^\dagger(x', t')]_\pm\rangle \tag{3}$$

再参考Witten 论文可以得到G_R定义(这里引入了±为了讨论费米子传播子)

$$G_R(t_1, x_1; t_2, x_2) = \theta(t_{12})[G(it_1, x_1; -\varepsilon + it_2, x_2) \pm G(it_2, x_2; \varepsilon + it_1, x_1)] \tag{4}$$

- 其中的ε引入了Locality使得$\theta(t_{12}) \Rightarrow \theta(t_{12} - |x_{12}|)$ 虽然对这一步的操作存疑，但是这个是后面确定积分范围重要的一步。

- 第一项和第二项分别是

$$
\begin{aligned}
&\frac{n_b}{2\sinh\left(\frac{x_{12}-t_{12}}{2}\right)^{2h} 2\sinh\left(\frac{x_{12}+t_{12}}{2}\right)^{2\tilde{h}}} \\
=&\frac{1}{(-1)^{2h}}\cdot\frac{n_b}{2\sinh\left(\frac{t_{12}-x_{12}}{2}\right)^{2h} 2\sinh\left(\frac{x_{12}+t_{12}}{2}\right)^{2\tilde{h}}} \\
&\frac{n_f}{2\sinh\left(\frac{x_{21}-t_{21}}{2}\right)^{2h} 2\sinh\left(\frac{x_{21}+t_{21}}{2}\right)^{2\tilde{h}}} \\
=&\frac{1}{(-1)^{2\tilde{h}}}\cdot\frac{n_f}{2\sinh\left(\frac{t_{12}-x_{12}}{2}\right)^{2h} 2\sinh\left(\frac{x_{12}+t_{12}}{2}\right)^{2\tilde{h}}}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

所以$G_R^{b,f}$的区别在于

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(-1)^{2h}} \pm \frac{1}{(-1)^{2\tilde{h}}} \\
=&e^{-i\pi(2h)} \pm e^{i\pi(2\tilde{h})} \\
=&e^{-i\pi(h-\tilde{h})}e^{-i\pi(h+\tilde{h})} \pm e^{i\pi(h+\tilde{h})}e^{-i\pi(h-\tilde{h})}
\end{aligned}
$$

$Question.\ A$ 相比彭老师论文中结果，这里费米子部分相差一个-i，而且不敢100\%确定上面相位选择是否正确，这里约定$-1=e^{i\pi}$, $\overline{-1}=e^{-i\pi}$。

对于玻色子结果是$-2i\sin\left(\pi(h+\tilde{h})\right)$,对于费米子结果是$-i2\cos\left(\pi(h+\tilde{h})\right)$,所以我们得到实时间的传播子形式

$$
G_R^b(t_1,x_1,t_2,x_2) = -\frac{2i\sin\left(\pi(h_b+\tilde{h}_b)\right)\theta(t_{12}-|x_{12}|)n_b}{\left(2\sinh\left(\frac{t_{12}-x_{12}}{2}\right)\right)^{2h_b}\left(2\sinh\left(\frac{t_{12}+x_{12}}{2}\right)\right)^{2\tilde{h}_b}} \quad , \quad b=\phi, G \tag{6}
$$

$$
G_R^f(t_1,x_1,t_2,x_2) = \frac{2\cos\left(\pi(h_f+\tilde{h}_f)\right)\theta(t_{12}-|x_{12}|)n_f}{\left(2\sinh\left(\frac{t_{12}-x_{12}}{2}\right)\right)^{2h_f}\left(2\sinh\left(\frac{t_{12}+x_{12}}{2}\right)\right)^{2\tilde{h}_f}} \quad , \quad f=\psi, \lambda\,. \tag{7}
$$

如果我们认为$G_{lr}(t_1,x_1;t_2,x_2)=G_{th}(it_1,x_1;it_2+\pi,x_2)$,$Question.\ B$ 虽然我不知道为什么可以直接$+\pi$这么操作

$$
G_{lr}t_1,x_1;t_2,x_2) = \frac{n_I}{\left(2\cosh\left(\frac{x_{12}-t_{12}}{2}\right)\right)^{2h_I}\left(2\cosh\left(\frac{x_{12}+t_{12}}{2}\right)\right)^{2\tilde{h}_I}} \tag{8}
$$

1.Kernel本征函数的坐标变换

为了方便计算，我们引入新的变量$u=-e^{x-t},\quad v=-e^{-x-t}$从而对应的各种Kernel变成如下形式，对应的Kernel就是将对应的G_R,G_{lr}代入替换。

$$
\begin{aligned}
G_{lr}(t_1,x_1,t_2,x_2) &\cong n\left(\frac{v_1+v_2}{\sqrt{v_1}\sqrt{v_2}}\right)^{-2\tilde{h}}\left(\frac{u_1+u_2}{\sqrt{u_1}\sqrt{u_2}}\right)^{-2h} \\
G_R^b(t_1,x_1,t_2,x_2) &\cong -i2n\sin\left(\pi(\tilde{h}+h)\right)\left(\frac{v_2-v_1}{\sqrt{v_1}\sqrt{v_2}}\right)^{-2\tilde{h}}\left(\frac{u_2-u_1}{\sqrt{u_1}\sqrt{u_2}}\right)^{-2h} \\
G_R^f(t_1,x_1,t_2,x_2) &\cong 2n\cos\left(\pi(\tilde{h}+h)\right)\left(\frac{v_2-v_1}{\sqrt{v_1}\sqrt{v_2}}\right)^{-2\tilde{h}}\left(\frac{u_2-u_1}{\sqrt{u_1}\sqrt{u_2}}\right)^{-2h}
\end{aligned} \tag{9}
$$

我们先给出本征函数的形式，后续会证明该函数族确实是我们求解的本征函数。本征函数在$(u,v),(x,t)$表象下分别是

$$
\begin{aligned}
\Psi_R^I(1,2) &= (-u_1u_2)^{\frac{h_1+h_2}{2}}(-v_1v_2)^{\frac{\tilde{h}_1+\tilde{h}_2}{2}}u_{12}^{h-h_1-h_2}v_{12}^{\tilde{h}-\tilde{h}_1-\tilde{h}_2} \\
\Psi_R^I(1,2) &= \frac{e^{-\frac{1}{2}(h+\tilde{h})(t_1+t_2)-\frac{1}{2}(h-\tilde{h})(x_1+x_2)}}{(2\cosh\frac{x_{12}-t_{12}}{2})^{h_1+h_2-h}(2\cosh\frac{x_{12}+t_{12}}{2})^{\tilde{h}_1+\tilde{h}_2-\tilde{h}}}
\end{aligned} \tag{10}
$$

$Question.C$ 1. 这里的$u_{12}v_{12}$代入为u_1+u_2才正确；2. 第一式不能复现成第二个式子，相差相位因子而且我觉得没有负号是正确的，不带负号可以完全复现论文中的结果。

$$
\text{integrand} = (u_3-u_1)^A(u_4-u_2)^B(u_3+u_4)^C \tag{11}
$$

2.本征值计算过程

$$
\iint du_3du_4dv_3dv_4\,|J|K^{ij}(u_1,u_2,u_3,u_4;v_1,v_2,v_3,v_4)\Psi^j(u_3,u_4;v_3,v_4) = k^{ij}\Psi^i(u_1,u_2;v_1,v_2) \tag{12}
$$

2.1 积分区间

因为$\theta(t-|x|)$函数的存在等效于改变积分区间，这里直接给出积分区间：$\int\limits_{u_1}^{\infty}du_3\int\limits_{-\infty}^{u_2}du_4$。对于$v$积分有相似结构，所以只用在积分结果将$h\to\tilde{h}$以及其他conformal weight即可。

2.2Jacobi

其中$|J|$代表从(x,t)表象变换成(u,v)表象的雅可比行列式，计算可得$|J|=\frac{1}{4u_3u_4v_3v_4}$

- 推导：坐标变换

$$
\begin{aligned}
\because\quad & u=-e^{x-t},\quad v=-e^{-x-t} \\
\therefore\quad & \ln(-u)=x-t,\ln(-v)=-x-t \\
\therefore\quad & x=\frac{1}{2}(\ln(-u)-\ln(-v))=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{u}{v}\right) \\
& t=-\frac{1}{2}(\ln(-u)+\ln(-v))=-\frac{1}{2}\ln(uv) \\
\because\quad & dxdt=Jdudv \\
\therefore\quad &
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \frac{1}{2u} & -\frac{1}{2v} \\ -\frac{1}{2u} & -\frac{1}{2v} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2uv}
\end{aligned}
$$

2.3 本征函数形式的讨论

a. 简化本征函数:

$\Psi_R^I(1,2)$中的$h_{1,2},\tilde{h}_{1,2}$对应于w_1,w_2处外场的conformal weight，由于我们关注的Kernel的形式为K^{ij}，对应的四点函数是如下形式：$\langle\bar{\Phi}\Phi|\bar{\Psi}\Psi\rangle$， 所以我们目前考虑的情况下$h_1=h_2,\tilde{h}_1=\tilde{h}_2$。也就是$\Psi_R^I(1,2)=(u_1u_2)^{h_I}(v_1v_2)^{\tilde{h}_I}u_{12}^{h-2h_I}v_{12}^{\tilde{h}-2\tilde{h}_I}$.

b. 本征函数各个组分的幂次的讨论:

观察K^{ij}中$G_R(1,3)G_R(2,4)G_{lr}(3,4)$中$u$的幂次:

$$
(u_1u_3)^{h_i}\subset G_R(1,3);(u_2u_4)^{h_i}\subset G_R(2,4);u_3^{h^*}u_4^{h^*}\subset G_{th}(3,4) \tag{13}
$$

所以$(u_1u_2)^{h_i}\cdot(u_3^{h_i+h^*}u_4^{h_i+h^*})\subset K^{ij}$， 由于$u_3^{h_j}u_4^{h_j}\subset\Psi_R^j$ 且$(u_3u_4)^{-1}\subset|J|$， 所以$\{(u_3u_4)^{h_i+h_j+h^*-1}=1\}\subset K^{ij}\Psi^j,(u_1u_2)^{h_i}=\Psi^i$。

首先可以注意到u_1u_2这意味着$K^{ij}\Psi^j$中参与u_3,u_4积分的被积函数形式如下，

$$
\text{integrand}=(u_3-u_1)^A(u_4-u_2)^B(u_3+u_4)^C \tag{14}
$$

2.4 卷积积分

这里直接给出卷积积分结果以及可能用到的积分公式:

$$\text{tot} = (u_1+u_2)^{A+B+C+2} \cdot \frac{\pi}{\sin(\pi B)} \cdot \frac{\Gamma(A+1)\Gamma(-A-B-C-2)}{\Gamma(-B)\Gamma(-C)}$$

$$\int_{u_1}^{\infty} du_3 (u_3-u_1)^A (u_3+u_4)^C = \frac{\Gamma(A+1)\Gamma(-A-C-1)(u_1+u_4)^{A+C+1}}{\Gamma(-C)}$$

$$\int_{-\infty}^{u_2} du_4 (u_1+u_4)^{A+C+1}(u_4-u_2)^B = \frac{\pi\csc(\pi B)\Gamma(-2-(A+B+C))(u_1+u_2)^{A+B+C+2}}{\Gamma(-(A+C+1))\Gamma(-B)}$$

a. 结合费曼图的讨论：

从费曼图的形式 $G_R(1,3)G_R(2,4)G_{th}(3,4)^{q-1}$ 可以得到 Conformal weight 分析。也就是 $A=-2h_i, B=-2h_i, C=-2h^*+h-2h_j$。结合之前对conformal weight的讨论可以知道有如下公式 $A+B+C+2=(h-2h_i)+(2-2h_i-2h_j-2h^*)=h-2h_i$ ，所以发现 $(u_1+u_2)^{A+B+C+2}\subset\Psi^i$，验证了本征函数形式的正确性。

同时发现可以用h_i表示$C=h-2h_i-2$,所以可以用h_i重新表示我们卷积积分结果如下，并且利用Gamma函数的欧拉反射公式$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$可以进一步化简

$$\begin{aligned}
\text{convolution} =& u_1^{h_i}u_2^{h_i}(u_1+u_2)^{h-2h_i} \cdot \frac{-\pi}{\sin(2\pi h_i)} \frac{\Gamma(1-2h_i)\Gamma(2h_i-h)}{\Gamma(2h_i)\Gamma(-h-2h_i+2)} \\
\propto& \frac{-\pi}{\sin(2\pi h_i)} \frac{\Gamma(1-2h_i)\Gamma(2h_i-h)}{\Gamma(2h_i)\Gamma(-h-2h_i+2)} \\
=& -\frac{\Gamma(1-2h_i)^2\Gamma(2h_i-h)}{\Gamma(-h-2h_i+2)} \\
=& -\frac{\sin(\pi(h+2h_i-1))}{\pi} \cdot \Gamma(1-2h_i)^2\Gamma(2h_i-h)\Gamma(h+2h_i-1)
\end{aligned}$$

b.u,v卷积完之后的完整结果是

$$\begin{aligned}
&u_1^{h_i}u_2^{h_i}(u_1+u_2)^{h-2h_i} \cdot v_1^{h_i}v_2^{h_i}(v_1+v_2)^{h-2h_i}\times \\
&\frac{\sin\left(\pi(\tilde{h}+2\tilde{h}_i-1)\right)\sin\left(\pi(h+2h_i-1)\right)}{\pi^2}\times \\
&\Gamma(1-2\tilde{h}_i)^2\Gamma(2\tilde{h}_i-\tilde{h})\Gamma(\tilde{h}+2\tilde{h}_i-1)\times \\
&\Gamma(1-2h_i)^2\Gamma(2h_i-h)\Gamma(h+2h_i-1)
\end{aligned}$$

3.本征值的计算结果

本征值的计算需要再匹配上各项系数以及n因子.我们看到卷积部分仅与K^{ij}对应的h_i有关，而这里得到的h_i的结果与彭老师论文中一致。Kernel本征值的计算的结构可以拆分成$\text{Coefficient}\times\text{Integrand}$ 所以新的计算中得到的结果与彭老师论文中的区别仅在于Coefficient.也就是说计算结果等价于彭老师结果整体的$\pm\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$。对于具体系数是如何对应各个Kernel，讨论见之前Kernel的系数讨论一节。

复变量傅里叶变换

参考Witten论文得到我们需要的复变量傅里叶变换公式

$$\int \frac{d^2x}{|x|^{2a}}\left(\frac{i}{2}\bar{x}\right)^n e^{ipx} = c(a,n)p^{a-1-n}\bar{p}^{a-1}$$
$$c(a,n) \equiv \frac{\pi}{2^{2a-2}}\frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(a-n)}$$

所以我们可以得到

$$\mathcal{F}[\frac{1}{z^a\bar{z}^{a-n}}] = \frac{\pi}{i^n\cdot 2^{2a-n-2}}\frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(a-n)}p^{a-n-1}\bar{p}^{a-1}$$

当$a=2h, a-n=2\tilde{h}$时，可知

$$\frac{1}{z^{2h}\bar{z}^{2\tilde{h}}} \Rightarrow p^{2\tilde{h}-1}\bar{p}^{2h-1}\times\frac{\pi}{(-1)^{h-\tilde{h}}\cdot 2^{2h+2\tilde{h}-2}}\times\frac{\Gamma(1-2h)}{\Gamma(2\tilde{h})}$$

第一步:匹配$p,\bar{p}$

因为需要$\mathcal{F}[G]\mathcal{F}[\Sigma]=-1$ 所以$p^{2\tilde{h}_G+2\tilde{h}_\Sigma-2}\times\bar{p}^{2h_G+2h_\Sigma-2}=1$，所以要求

$$h_G+h_\Sigma=1$$
$$\tilde{h}_G+\tilde{h}_\Sigma=1$$

第二步：处理Γ函数

利用欧拉反射公式$\Gamma(1-z)\Gamma(z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$，我们计算的量

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(1-2h_\Sigma)}{\Gamma(2\tilde{h}_\Sigma)}\times\frac{\Gamma(1-2h_G)}{\Gamma(2\tilde{h}_G)}\\
=&\frac{\Gamma(2h_G-1)}{\Gamma(2-2\tilde{h}_G)}\times\frac{\Gamma(1-2h_G)}{\Gamma(2\tilde{h}_G)}\\
=&\frac{\Gamma(2h_G)}{(2h_G-1)(1-2\tilde{h}_G)\Gamma(1-2\tilde{h}_G)}\cdot\frac{\Gamma(1-2h_G)}{\Gamma(2\tilde{h}_G)}\\
=&\frac{1}{(2h_G-1)(1-2\tilde{h}_G)}\times\frac{\sin(2\pi\tilde{h}_G)}{\sin(2\pi h_G)}
\end{aligned}$$

因为$h=\tilde{h}+s$，其中$s\in\frac{\mathbb{Z}}{2}$ 所以$\frac{\sin(2\pi\tilde{h}_G)}{\sin(2\pi h_G)}=\frac{1}{(-1)^{2s}}=\frac{1}{(-1)^{2h-2\tilde{h}}}$

第三步：处理因子

- $2^{2h+2\tilde{h}-2}\times 2^{2(1-h)+2(1-\tilde{h})-2}=1$,所以不用考虑2因子；
- $i^{-n_\Sigma}i^{-n_G}=i^{2h_G-2\tilde{h}_G}i^{-2h_G+2\tilde{h}_G}=1$，所以不用考虑$i$因子；
- 所以$\frac{\pi^2 n_G n_\Sigma}{(-1)^{2h-2\tilde{h}}}\times\frac{1}{(2h_G-1)(1-2\tilde{h}_G)}=-1$

一些关于SYK中，场泛函行列式积分的笔记

1. Majorana Fermions

- 1.1 Gaussian-Berezin-integral：

  Sarosi中提到使用Gaussian-Berezin-integral: $\int \mathcal{D}\psi e^{-\frac{1}{2}\psi\cdot A\cdot\psi} = \text{Constant}\cdot\sqrt{\det A}$（**注意到这里是矩阵相乘**）

  - 而对无穷维线性空间，矩阵点乘的连续化对应于$\int d\tau_1 d\tau_2\, \psi(\tau_1)A(\tau_1,\tau_2)\psi(\tau_2)$,这也就是为什么我们需要不厌其烦的带着积分进行讨论

  更多格拉斯曼数积分性质详见wiki：

The following formulas for Gaussian integrals are used often in the path integral formulation of quantum field theory:

- $$\int \exp\left[-\theta^T A\eta\right] d\theta\, d\eta = \det A$$

with A being a complex $n\times n$ matrix.

- $$\int \exp\left[-\tfrac{1}{2}\theta^T M\theta\right] d\theta = \begin{cases} \operatorname{Pf} M & n \text{ even} \\ 0 & n \text{ odd} \end{cases}$$

with M being a complex skew-symmetric $n\times n$ matrix, and $\operatorname{Pf} M$ being the Pfaffian of M, which fulfills $(\operatorname{Pf} M)^2 = \det M$.

In the above formulas the notation $d\theta = d\theta_1\cdots d\theta_n$ is used. From these formulas, other useful formulas follow (See Appendix A in[2]) :

- $$\int \exp\left[\theta^T A\eta + \theta^T J + K^T\eta\right] d\eta_1\, d\theta_1 \ldots d\eta_n d\theta_n = \det A\ \exp[-K^T A^{-1} J]$$

with A being an invertible $n\times n$ matrix. Note that these integrals are all in the form of a partition function.

- 1.2：插入$G\Sigma$ identity:

  我们考虑的积分如下（已经进行完$j\ldots$的系综平均）

$$I = \int d\tau \frac{1}{2}\psi^i(\tau)\partial_\tau\psi_i(\tau) + \text{Constant}\cdot\int d\tau_1 d\tau_2 \bullet \left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\psi_i(\tau_1)\psi_i(\tau_2)\right)^q \tag{1}$$

为了后续方便写成矩阵二次型的形式，我们要讲$\int d\tau\psi(\tau)\partial_\tau\psi(\tau)$改写成$\int d\tau_1 d\tau_2\psi(\tau_1)\cdot\delta(\tau_{12})\partial_{\tau_1}\psi(\tau_2)$

$G\Sigma$ identity:将插入上面红点的位置

$$\delta\left(G(\tau_1,\tau_2) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi_i(\tau_1)\psi_i(\tau_2)\right) \propto \int \mathcal{D}\Sigma(\tau_1,\tau_2)\exp\left(-\frac{N}{2}\Sigma(\tau_1,\tau_2)\left(G(\tau_1,\tau_2) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi_i(\tau_1)\psi_i(\tau_2)\right)\right) \tag{2}$$

这里我们就将积分改写为内积·的形式，所以在配分函数中ψ部分可以做如下变形，（$\tau_{1,2}$分别代表算符的行指标和列指标）

$$
\begin{aligned}
&\prod_i \int \mathcal{D}\psi_i \exp\left[-\sum_i \frac{1}{2}\psi_i\cdot\delta(\tau_{12})\partial_{\tau_1}\cdot\psi_i + \frac{1}{2}\sum_i \psi_i\cdot\Sigma\cdot\psi_i\right] \\
=&\prod_i \left(\int \mathcal{D}\psi_i e^{-\frac{1}{2}\psi_i\cdot(\delta(\tau_{12})\partial_{\tau_1}-\Sigma)\cdot\psi_i}\right) \\
\propto&\prod_i \det\left(\delta(\tau_{12})\partial_{\tau_1}-\Sigma\right)^{\frac{1}{2}} \\
=&e^{\frac{N}{2}\ln\det\left(\delta(\tau_{12})\partial_{\tau_1}-\Sigma\right)} \\
=&e^{\frac{N}{2}\mathrm{Tr}\ln(\delta(\tau_1,\tau_2)\partial_\tau-\Sigma)}
\end{aligned}
$$

最后一步用到等式$\mathrm{Tr}\ln M=\ln\det M$,并且在考虑Tr的意义下我们可以不用再考虑$\delta(\tau_{12})$ 同时在$\ln\det$中也可以忽略掉$\delta(\tau_{12})$

如果考虑$Z(J)\sim\int DGD\Sigma e^{-NI[G,\Sigma]}$,那么我们可以发现

$$
-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln(\delta(\tau_1,\tau_2)\partial_{\tau_2}-\Sigma)\subset I \tag{3}
$$

- 1.3推导SD方程第一部分:

  第一部分就是关于Σ的变分,

$$
I\supset-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln(\delta(\tau_1,\tau_2)\partial_{\tau_2}-\Sigma)+\frac{1}{2}\iint d\tau_1 d\tau_2\Sigma(\tau_1,\tau_2)G^{\psi}(\tau_1,\tau_2) \tag{4}
$$

  对Σ变分得到

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\frac{-\delta\Sigma}{\delta(\tau_1,\tau_2)\partial_\tau-\Sigma}+\frac{1}{2}\iint d\tau_1 d\tau_2\delta\Sigma(\tau_1,\tau_2)G^{\psi}(\tau_1,\tau_2) \\
=&\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\delta\Sigma\cdot(\delta(\tau_1,\tau_2)\partial_\tau-\Sigma)^{-1})+\cdots \\
=&\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\int d\tau_2\delta\Sigma(\tau,\tau_2)\cdot(\delta(\tau_1,\tau_2)\partial_\tau-\Sigma)^{-1}(\tau_2,\tau'))+\cdots \\
=&\frac{1}{2}\iint d\tau_1 d\tau_2\ \delta\Sigma(\tau_1,\tau_2)\cdot((\delta(\tau_1,\tau_2)\partial_\tau-\Sigma)^{-1}(\tau_2,\tau_1)+G^{\psi}(\tau_1,\tau_2)
\end{aligned}
$$

  考虑到$G^{\psi}(\tau_1,\tau_2)=-G^{\psi}(\tau_2,\tau_1)$ 调换完顺序后我们可以认为算符$(\delta(\tau_1,\tau_2)\partial_\tau-\Sigma)^{-1}\cong G^{\psi}$,也就有$\delta(\tau_1,\tau_2)\partial_\tau G-\Sigma\cdot G=\mathbb{1}$

  当我们认为G有平移对称性的时候(经典的SYKq中可以由第二个SD方程给出Σ也有平移对称性),可以把$\Sigma\cdot G$写成卷积形式,于是允许我们在傅里叶空间更好的求解。

2. Scalar Bosons

相比于费米子场的情况略有不同

- 2.1 修改地方1:

  因为scalar field的动能项是$\frac{1}{2}(\partial\phi)^2$,所以改写为二次型的时候会有因分部积分带来的负号

$$
\partial_\tau-\Sigma\Rightarrow-\partial^2-\Sigma \tag{5}
$$

- 2.2 修改地方2:

  可以参考AZee §1.3中的论述,下面内容由通义千问梳理:

假设作用量为:

$$
S[\phi]=\frac{1}{2}\int d^{d}x\,\phi(x)\hat{O}\phi(x), \tag{6}
$$

路径积分的结果为：

$$
Z=\int\mathcal{D}\phi\,e^{-S[\phi]}\propto\left(\det\hat{O}\right)^{-1/2}. \tag{7}
$$

我们暂时不用管常数部分因为后续探讨的EOM不受影响，其余部分参考ψ场的讨论，我们可以得到

$$
\begin{gathered}
e^{-\frac{N}{2}\operatorname{Tr}\ln\left(-\partial_{\tau}^{2}-\Sigma\right)}\subset Z(J)\\
\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\ln\left(-\delta(\tau_1,\tau_2)\partial_{\tau_2}^{2}-\Sigma\right)\subset I
\end{gathered} \tag{8}
$$

- 2.3 推导标量场的第一个SD方程

  这里采用witten § 6.1的写法，(其他ref给出相同结果，只不过推导过程中会有I中系数的差异)

$$
\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\ln\left(-\delta(\tau_1,\tau_2)\partial_{\tau_2}^{2}-\Sigma\right)+\frac{1}{2}\iint d\tau_1 d\tau_2\Sigma(\tau_1,\tau_2)G^{\phi}(\tau_1,\tau_2)\subset I \tag{9}
$$

  类似对fermionic 场做变分的过程，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\iint d\tau_1 d\tau_2\;\delta\Sigma(\tau_1,\tau_2)\cdot\left(-(-\partial^{2}-\Sigma)^{-1}(\tau_2,\tau_1)+G^{\phi}(\tau_1,\tau_2)\right)\\
=&\cdots\left(\delta\Sigma(\tau_1,\tau_2)\cdot\left(-(-\partial^{2}-\Sigma)^{-1}(\tau_2,\tau_1)+G^{\phi}(\tau_2,\tau_1)\right)\right)
\end{aligned}
$$

  所以我们得到与witten eqn 6.2相同结果

$$
G^{\phi}\cong(-\partial^{2}-\Sigma)^{-1} \tag{10}
$$

  RMK： **这里不论是一维还是二维SD方程都不受影响**，因为上面没有用到维度和ansatz相关的条件

- 2.4 关于witten SYK的一点困惑

  除了witten工作之外，其余只有一个ϕ耦合在其他的fermion上，所以$G\Sigma$ action 中不存在$G^{\phi}(\tau)^{q}$的问题，但是witten给出的naive model中存在这个问题。针对witten §6.1的写法，关于第二个SD方程存在一些小疑惑，但是和王淼学长讨论，很粗糙的认为在large N极限但不是large q极限下可以忽略这个问题。

  - 对于费米子，在对$j\ldots$积分后才能写成双线性型的幂形式

$$
\sum_{1\le j<k<l\le N}(\psi_i\psi_j\psi_k\psi_l)(\tau)(\psi_i\psi_j\psi_k\psi_l)(\tau')=\frac{1}{4!}\left[\sum_i\psi_i(\tau)\psi_i(\tau')\right]^{4} \tag{11}
$$

推导

$$
\begin{aligned}
\text{lhs} =& \sum_{1\le i<j<k<l\le N} \psi_i\psi_j\psi_k\psi_l(\tau)\psi_i\psi_j\psi_k\psi_l(\tau') \\
=& \frac{1}{4!}\sum_{i\neq j\neq k\neq l} \psi_i\psi_j\psi_k\psi_l(\tau)\psi_i\psi_j\psi_k\psi_l(\tau') \\
=& \frac{1}{4!}\sum_{i\neq j\neq k\neq l} \psi_i\psi_i'\psi_j\psi_j'\psi_k\psi_k'\psi_l\psi_l' \\
=& \frac{1}{4!}\left(\sum_i \psi_i\psi_i'\right)\left(\sum_j \psi_j\psi_j'\right)\left(\sum_k \psi_k\psi_k'\right)\left(\sum_l \psi_l\psi_l'\right)_{i\neq j\neq k\neq l}
\end{aligned}
$$

考虑符号：由于第二步到第三步对SYK$_q$需要进行$\frac{q^2-q}{2}$次兑换，H_{int}有$i^{q/2}$因子，所以总贡献为$-1^{q^2/2}=1$ 因为q是偶数；对于ϕ场无序担心正负号问题，可以完全遵循上面推导。

最后一步是由于$\psi^2(\tau)=0$ 所以$\sum_a \psi^a \times \sum_b \psi^b = \sum_{a\neq b}\psi^a\psi^b$，于是可以扔掉$i\neq j\neq k\neq l$的限制，所以得到rhs，但是如果我们考虑的是$\phi$场，**那么当我们等效于考虑自相互作用**

3. Complex Bosons

3.1 **高斯积分**

$$
Z_{\text{boson}} = \prod \iint \mathcal{D}\bar{\phi}_i\,\mathcal{D}\phi_i\, e^{-\bar{\phi}_i\,h_{ij}\,\phi_j} = \frac{1}{\det(h)} \tag{12}
$$

对于spinor field，见https://zhuanlan.zhihu.com/p/680456212，

3.2 插$\mathbb{1}$

对于复标量场，有一些tricky point。由于复高斯变量积分的原因，为了得到与SD方程一致的结果，需要修改一下路径积分中插入的$\mathbb{1}$算符。具体步骤参考arXiv:2103.16270v2 [hep-th]中eqn 18，相比于Sarosi里面插入$\mathbb{1}$中的$\frac{N}{2}$,这里需要改成系数N。不同于实标量场，复标量场$\overline{\Phi}(\#-\Sigma)\Phi$的泛函积分贡献系数是$N$而不是$\frac{N}{2}$，所以$N$是匹配的系数。

$$
\begin{aligned}
1 =& \int \mathcal{D}G\delta\left(G(\tau,\tau') - \frac{1}{N}\sum \phi^\dagger(\tau)\phi(\tau')\right) \\
=& \int \mathcal{D}G\mathcal{D}\Sigma \exp\left[-N\int d\tau d\tau'\Sigma(\tau,\tau')\left(G(\tau,\tau') - \frac{1}{N}\sum \phi^\dagger(\tau)\phi(\tau')\right)\right]
\end{aligned}
$$

3.3计算SD方程

a. 第一组SD方程

$$
\begin{aligned}
&\iint \mathcal{D}\phi^\dagger\mathcal{D}\phi \exp\left(-\sum\phi^\dagger(\#-\Sigma)\phi - N\Sigma G+\cdots\right) \\
=&\exp\left(-N\ln(\det(\#-\Sigma)) - N\Sigma G+\cdots\right)
\end{aligned}
$$

可以发现并不影响第一组SD方程。

b.第二组方程

关注指数部分

$$\exp\left(-N\iint \Sigma G + \text{Gaussian Part}\right) \tag{13}$$

参考复高斯变量中的积分结果：$\propto \sigma^2(XY+YX)$，X, Y是$J\ldots, \bar{J}\ldots$耦合的场量项。如果我们将二重积分的时间参数妥善排布，那么我们将得到$\sim 2\sigma^2(XY) = \langle J\ldots\bar{J}\ldots\rangle(XY)$。所以最终得到的SD方程是$\Sigma = \langle J\ldots\bar{J}\ldots\rangle(\text{Green Functions})$，而不是$2\langle J\ldots\bar{J}\ldots\rangle$

一些Notation和公式

$$e^{\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\log(A)]} = \mathrm{Pf}(A) \tag{14}$$

$$\det(\ldots)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log^{\det(\ldots)}} \tag{15}$$

1 Propagator

$\langle \bar B_1 B_2\rangle = G^{B}(z_{12})$

$\langle \bar\phi_1 \phi_2\rangle = G^{\phi}(z_{12})$

$\langle \bar\psi_1 \psi_2\rangle = G^{\psi}(z_{12})$

$\langle \lambda_1 \bar\lambda_2\rangle = G^{\bar\lambda}(z_{12})$

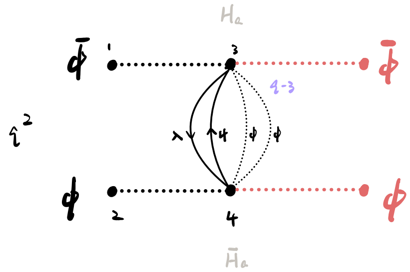
2 Notation on vertex

$$j_{a i_1\cdots i_q}\big(\underbrace{q\cdot \bar\lambda_a \psi_{i_1}\phi_{i_2}\cdots\phi_{i_q}}_{H_a} - \underbrace{i\, B_a \phi_{i_1}\cdots\phi_{i_q}}_{H_b}\big)$$

---

① $K^{\phi\phi}$

由于 Kernel 定义为：$\mathcal{F}_{n+1} = K\cdot F_n$
所以"出态"不参与 N counting 仅贡献对称因子
于是画为粉色



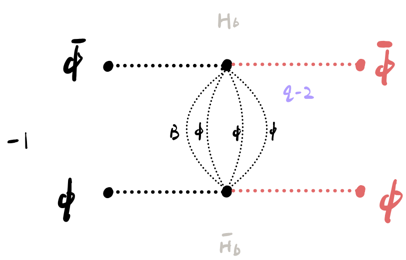
入态 图的缩并贡献

$$\left(\frac{1}{q!}\right)^2\cdot q^2\cdot (q-3)!\cdot\big((q-1)\cdot(q-2)\big)\cdot\big((q-1)\cdot(q-2)\big)\cdot\frac{(q-1)!\,J^2}{N^q}\cdot N\cdot(M\cdot N^{q-3}\cdot N)$$

2个J…无穷求和因子 | 顶点因子 | rung的匹配Dof | 第一个Rail匹配Dof | 第二个rail | $\langle J\ldots J\ldots\rangle$ | G 的 M.N 因子

$$= (q-1)\cdot(q-2)\,J^2\mu$$

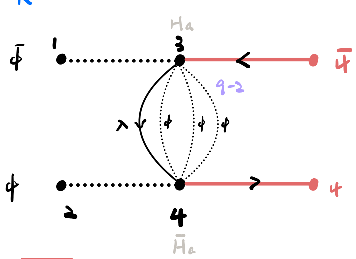
$+$



$$\frac{J^2}{q\cdot q!\,N^q}\times(-1)\cdot(q-2)!\cdot[q\cdot(q-1)]^2\cdot N\cdot N^{q-2}N\cdot M$$

$$= -(q-1)\,J^2\mu$$

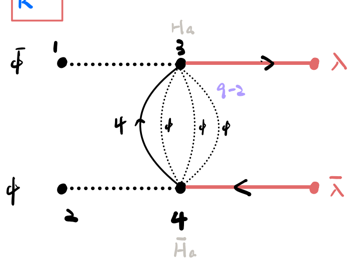
② $K^{\phi\psi}$



$$q^2\cdot\frac{J^2}{q\cdot q!\,N^q}\,(q-1)^2\cdot(q-2)!\cdot N\cdot M\cdot N^{q-2}$$

$$= (q-1)\,J^2\mu$$

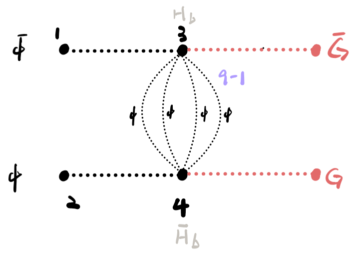
③ $\boxed{K^{\phi\bar\lambda}}$



$$q^2\cdot\frac{J^2}{q\cdot q!\,N^q}\,(q-1)^2\cdot(q-2)!\cdot N\cdot N\cdot N^{q-2}$$

$$= (q-1)\,J^2$$

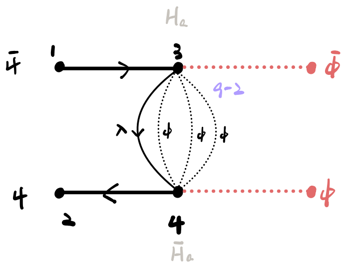
④ $K^{\phi G}$



$$-1\cdot\frac{J^2}{q\cdot q!\,N^q}\quad q^2\cdot(q-1)!\cdot N\cdot N^{q-1}$$

$$= -J^2$$

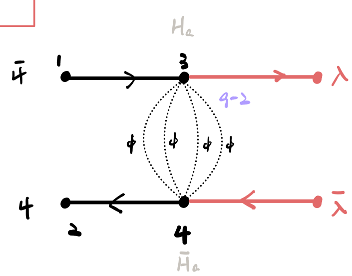
⑤ $K^{\psi\phi}$



$$q^2\,\frac{J^2}{q\cdot q!\,N^q}\;(q-1)^2\cdot(q-2)!\;\cdot N\cdot N^{q-2}\cdot M$$

$$=(q-1)J^2\mu$$

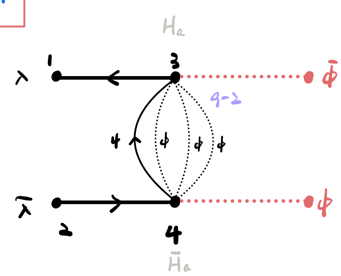
⑥ $\boxed{K^{\psi\bar\lambda}}$



$$q^2\,\frac{J^2}{q\cdot q!\,N^q}\cdot(q-1)!\;\cdot N\cdot N^{q-1}$$

$$=J^2$$

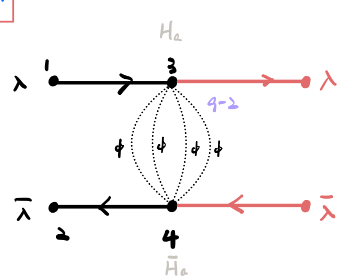
⑦ $\boxed{K^{\bar\lambda\phi}}$



$$q^2\,\frac{J^2}{q\cdot q!\,N^q}\;(q-1)^2\cdot(q-2)!\;\cdot M\cdot N^{q-2}\cdot N$$

$$=(q-1)J^2\mu$$

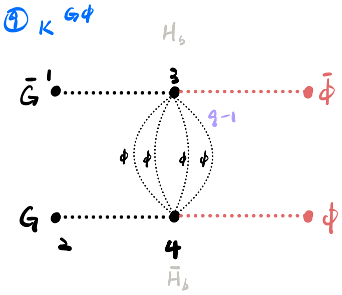
⑧ $\boxed{K^{\bar\lambda\psi}}$



$$q^2\,\frac{J^2}{q\cdot q!\,N^q}\cdot(q-1)!\;\cdot M\cdot N^{q-1}$$

$$=J^2\mu$$

④ $K^{G\phi}$



$$-\frac{J^2}{q\cdot q!\,N^q}\cdot q^2(q-1)!\cdot M\cdot N^{q-1}$$

$$= -J^2\mu$$

本征值计算代码

这里是复现彭老师论文中计算Kernel本征值的代码。更改定义函数中替换规则以及更改计算示例中 `PreFac` 以及更改对应的 `X,Y,Z` 即可进行新的计算。

```
(*定义函数*)

ClearAll["Global`*"]
(*替换规则*)
RR = {h\[Phi] -> (\[Mu]*q - 1)/(2*\[Mu]*q^2 - 2),
   h\[Psi] -> (\[Mu]*q^2 + \[Mu]*q - 2)/(2*\[Mu]*q^2 - 2),
   h\[Lambda] -> (q - 1)/(2*\[Mu]*q^2 - 2),
   hG -> (\[Mu]*q^2 + q - 2)/(2*\[Mu]*q^2 - 2),
   bh\[Phi] -> (\[Mu]*q - 1)/(2*\[Mu]*q^2 - 2),
   bh\[Psi] -> (\[Mu]*q - 1)/(2*\[Mu]*q^2 - 2),
   bh\[Lambda] -> (\[Mu]*q^2 + q - 2)/(2*\[Mu]*q^2 - 2),
   bhG -> (\[Mu]*q^2 + q - 2)/(2*\[Mu]*q^2 - 2), bq -> q};
(*定义添加前缀的函数, 操作类似将h变成bar{h}*)
AP[expr_, prefix_] :=
 Module[{vars, replacementRules},(*获取表达式中的所有符号*)
  vars = DeleteDuplicates[Cases[expr, _Symbol, Infinity]];
  replacementRules = (# -> ToExpression[prefix <> SymbolName[#]])
& /@ vars;
  expr /. replacementRules]

(*定义计算函数F*)
F[a_, b_, m_, n_] :=
 Pi*Gamma[a + 1]*Gamma[b + 1]*
  Gamma[-a - b - m - n - 1]/(Gamma[a + b + 2]*Gamma[-a -
n]*Gamma[-b - m])
(*得到结果的函数Result*)
Convo[X_, Y_, Z_] := Module[{apX, apY, apZ, apXZ1}, apX = AP[X,
"b"];
  apY = AP[Y, "b"];
  apZ = AP[Z, "b"];
  apXZ1 = AP[X + Z + 1, "b"];
  F[apZ, apX, X - apX, Z - apZ] F[apXZ1, apY, Y - apY,
     Z + X - AP[Z + X, "b"]] // FullSimplify]



(*######计算示例########*)
```

```
PreFac;
X = -2 h\[Psi];
Y = -2 h\[Psi];
Z = h - 2 h\[Lambda] - 2 h\[Phi] (q - 1);

Print[PreFac Convo[X, Y, Z] /. RR // FullSimplify]
```