推出 DBI

Sec 14

34 min

D brane 上的低能有效作用量：　　只考虑 D brane 上的 massless mode

A_α　$\alpha = 0 \cdots p$　　　ϕ^a　$a = p+1 \cdots D-1$

ϕ^a ↓ Perpendicular Direction.

写出主部近似下的 Eff Action

$$S = -T_p \int d^{p+1}x \left(1 + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\partial_\alpha \phi^a \partial^\alpha \phi_a\right)$$

$T_p \cdot V_p = M_p$　　↳ Maxwell Term　　↳ Massless Scalar Field.

$$-\int dt \cdot 1 M_p$$

这里 $A_\alpha(x^0, \cdots, x^p)$　描述 Dp brane上的场.

$\phi^a(x^0, \cdots, x^p)$

Note: 注意区分 World Volume Coord 和 Target Space Coord

考虑近似：

$$\begin{cases} \phi^a = \phi^a(t) \\ A^\alpha = 0 \end{cases}$$

⟶ 代表一点上 ϕ 的行为相同.　　且 $\partial_\alpha \phi$ 和 $F_{\alpha\beta}$ 近似 Const (可直接积出 V_p)

于是 $S = \int dt \left[-M_{Dp} + \frac{1}{2} M_{Dp} (\dot{\phi}^a)^2 + \cdots\right]$

是一种 mass object 的 Action.

ϕ 描述 D-brane 的 Dynamics　从这种近似不可看出低能近似下 D brane 动力学.

- 对 Const $\partial_\alpha \phi^a$ and $F_{\alpha\beta}$ (振动幅度小可忽略)

claim：当考虑所有高阶小振动时得到 DBI

$$S \sim S_{DBI} = -T_p \int d^{p+1}x \sqrt{-\det(G_{\alpha\beta} + 2\pi\alpha' F_{\alpha\beta})}$$

$$G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \phi^a \partial_\beta \phi^a$$

物理解释：

① 考虑 ϕ 没激发时 $\phi^a=0$

$$S_{DBI} = -T_p\int d^{p+1}\sqrt{-\det(\eta_{\alpha\beta}+F_{\alpha\beta})}$$

$$\simeq -T_p\int d^{p+1}\left(-1+\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)$$

History. 引入这种作用量为了消除 Maxwell Theory 中 Singularity（场强在 r=0 时）

②

$g_{\alpha\beta}=\eta_{\mu\nu}\,\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu$ 嵌入诱导度规，α 遍历 Brane 内部方向。

其中 $X^\alpha = x^\alpha$ $X^a=\phi^a$

场 X^α ↘ 时空坐标 x^α ↓ 垂直方向。

X^μ 描述 Brane 嵌入时空的模式，上面的选取表明我们让 Brane 方方正正的嵌入

令 $F_{\alpha\beta}=0$ $S=-T_p\int d^{p+1}x\sqrt{-\det g_{\alpha\beta}} = T_p\int dV_{p+1}$ 对 N-G Action 的自然推广

于是 DBI 描述的是在 p-dimensional obj 在时空中相对论性运动

Q: Why massless mode 描述 D-brane Dynamic?

Reason:

闵氏时空 Translational Inv

所以 D brane 不能依赖坐标

所以 S 中 不能有 Potential term 直接含 ϕ 仅能是 $\partial\phi$

Claim That 有 Dependence of $\partial\phi$ in low-E Limit 仅能是 massless.

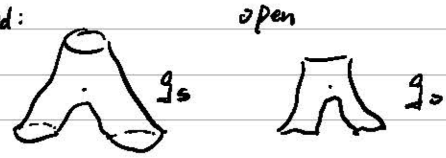
而 ϕ^a = const 是一个 Allowed Configuration，不能有 Potential for ϕ^a

* ϕ^a: Are Goldstone bosons for translational Sym in minkowski Space

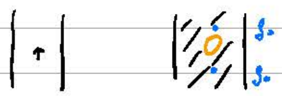
而造这一个 Dp 时 Minkowski 被破坏了. 对应 Goldstone Bosons 即是 ϕ^a

Strength of Open String Interaction

Closed: open



考虑一个相对危害 Case



由 Thm. 引入一个 Boundary 要引入一个 factor $e^{-\chi}$

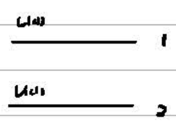
而这里看作等于有二个 Open String Vertex 于是 $g_s \sim g_o^2$

1:04

Multiple Coincidental D-brane

粒子: 几个粒子放在一起 . - - - Nothing Happen.

D brane: 几个 brane 放一起 - - - - Change A Lot

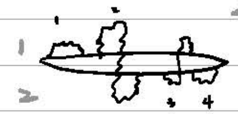


(U(1) 即 brane 上有个 A_μ Gauge Field)

$1+1=?$

① If $I = 4$

2个 brane 贴在一起



1-1 1-2 2-1 2 2

brane 2, 3 不同在于 $\sigma=0$ 在 brane 1 or 2 上

理论上 1—4 应有完全相同 Mass Spectrum.

Spectrum 依赖于 B.C B.C 依赖 Target Space 位置, 故这 4 种有相同 B.C

故 String Excitation State 写作

$|\Psi, IJ\rangle \qquad I, J = 1, 2.$

eg: $\alpha_{-1}^{a} |0, p^a, IJ\rangle$

$\alpha_{-1}^{a} |0, p^a, IJ\rangle$

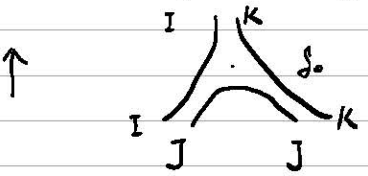
each open string excitation become 2×2 matrix

eg $(A_a)^I{}_J \quad (\phi^a)^I{}_J$ 标记场长在哪种弦上.

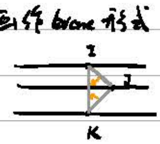
当有 n 个 branes 时变成 $n\times n$ matrices.

rmk: String interact by joining their ends (由图易知)

数学表示: matrix products in $I\ J$ indices.



☆☆☆ 将其画作 brane 形式   cf. NB



eg $(\phi^a)^1{}_2$ ←Complex Conjugate→ $(\phi^a)^2{}_1$ (但要考虑引入下面操作)

σ=0 时在 brane 1 上

σ=π 时在 brane 2 上

- Symmetry: (引入 Phase Factor)

  由上面那种 Splitting / Joining ends 的方式定义的 interaction, 有这样一种 Sym

  将每个 brane 上 记个 phase factor $e^{i\theta_I}$

  Rules:

  σ=0 ending on I multiply a phase factor $e^{i\theta_I}$

  σ=π ending on I multiply ... $e^{-i\theta_I}$

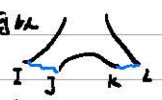
  Claim: 这是个 Symmetry

对 I = J: $(\phi^a)^I{}_J \to (\phi^a)^I{}_J$

对 I ≠ J: $(\phi^a)^I{}_J \to e^{i(\theta_I-\theta_J)}(\phi^a)^I{}_J$

$(\phi^a)^J{}_I = ((\phi^a)^I{}_J)^*$

Q: 是否可以



Answer: No string 连起来 对应同一 brane 上

考虑有 N 个 brane 合在一起

Coincidental branes : branes are indistinguishable from each other

则可以 Reshuffle Indices! (即 I, J ... 可交换)

于是有一个 U(N) Sym

eg

$|4, IJ\rangle \to U_{IK} U^*_{JL} |4, KL\rangle$

↳ for Reshuffle

换成 Matrix Notation ⇒ $\psi \to U\psi U^+$ (U 可是任何幺正矩阵)

N个branes 是不可区分的

于是它们有了 U(N) Sym.

* In other word: Each Open String Excitation Transform Under the adjoint rep of the U(N) Sym

在 String World Sheet角度看：（由于它们仅仅改变弦端点 Indices）

它是个 Global Sym

但 在 Space Time 它是Gauge Sym ：

In the world Volume of D-brane

新理解：

$(A_a)^I{}_J$ 在 U(N) 下变换

A_a 是 Gauge Field

∴ U(N) 是 Gauge Sym

A_a 是 Gauge Boson

为何是 Gauge Sym for field 呢?

1:29

Claim: Some Gauge Field. Transform as a matrix and interact with each other

It must be YM theory And it means it must be gauge sym

（看起来就是用 U(N)变换 就是 YM 理论）

到 low-E 极限了 会只有 Y-M 理论.

将 brane 分开：U(1) Theory

将 brane 合在一起：YM Theory

Claim: 当考虑 3个 A_a 相互作用 得到的结果与 String 相同.

YM Theory.

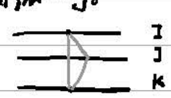
$$S = -\frac{1}{2g_{YM}^2}\int d^{p+1}x\ Tr\left[\frac{1}{4}F_{ab}F^{ab} - \frac{1}{2}(D_a\phi^a)\times(D_a\phi^a) + [\phi^a,\phi^b]^2 + \cdots\right]$$

$D_a\phi^a = \partial_a\phi^a - i[A_a,\phi^a]$

↑ 不需要关注

$$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a - [A_a, A_b]$$

A_a ϕ^a 现在都是 $n\times n$ matrices

Claim: $g_{YM} \sim g_o$

g_o 描述弦的相互 A [2个 open string → 1个 open string] $\propto g_o \sim g_s^{\frac{1}{2}}$

YM: 它给出描述 3个 A 相互作用 $\propto g_{YM}$

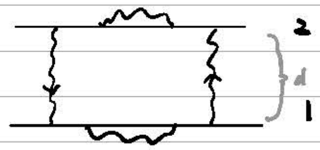
于是 $g_{YM}^2 = g_s\, \alpha'^{\frac{p-3}{2}} \cdot d_p$ (numerical const)

由 S_{YM} 无量纲计算和上式，$[\alpha'] = [L]$

D_3 brane. $p=3$.

于是 4D的时候 $g_{YM} = g_s^2$ 即 YM 的 Coupling 是无量纲的

Seperating Branes



1-1, 2-2 exactly same as before

1-2 : $X(\sigma=0, \tau) = X_0$

$X(\sigma=\pi, \tau) = X_0 + d$

对这个维度 mode expansion: $X = x_0 + w\sigma + X_R(\tau-\sigma) + X_L(\tau+\sigma)$

$w = \frac{d}{\pi}$ 　由 Dirichlet B.C: $X_L = -X_R$

Mass Spectrum:

$$2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^{\pi} d\sigma\, [(\partial_\tau X^i)^2 + (\partial_\sigma X^i)^2]$$

由于有了 $w\sigma$ 项 ∴ 这里要引入 w

$$M^2 = \left(\frac{d}{2\pi\alpha'}\right)^2 + \cdots$$

⟹ A_a ϕ^a no longer massless

这是 A_a 的 mass?

数值上看: $M = d\,T_s$ 　(与 Classical strech a string 一样)

于是现在仅有2类 massless mode: 1-1 & 2-2

1-2 & 2-1 ⟹ Massive

场论观点: $U(2) \longrightarrow U(1) \times U(1)$

Gauge Sym Breaking

Seperate Brane —— Higgs Mechanism

物理: 在我们选取的 Coord 下每 ϕ^a 场 即沿着上图 X 方向

该 ϕ^a 场获得了 expectation Value

Higgs ?? 对应 Higgs Mechanism

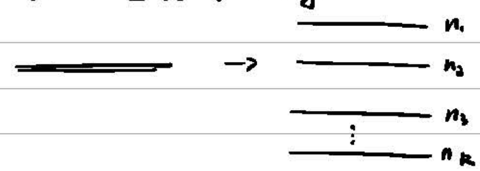
D brane 的时空对称性中不能有 ϕ potential 仅能有 $\partial_a \phi^a$ 项

而 D brane 上的 YM 却有 $([\phi^a, \phi^b])^2$

这意味着有 D brane (垂直着的) $[\phi^a, \phi^b] = 0$ ⟶ 可以将所有 ϕ 同时对角化

写HW

分开 Brane 还有 Translational Sym



$$\phi = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_k \end{pmatrix}$$

a_i : $n \times n$ matrix

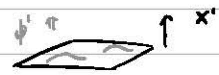
对称性破缺: $U(n) \longrightarrow U(n_1) \times U(n_2) \cdots\cdots U(n_k)$

Lec 15

Recap: # of scalar field = # of transverse matrices.

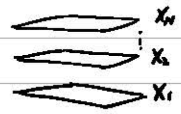
多个 Branes 叠在一起的 effective 作用量.

$$S_{eff} = -\frac{1}{g_{YM}^2}\int d^{p+1}x\, Tr\left[\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + (D_\alpha\phi^a)^2 - [\phi^a,\phi^b]^2 \cdots\right]$$



$\langle\phi^1\rangle = X^1$ (Brane的平均坐标)

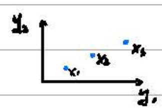
有N个 brane:



则 $\langle\phi\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_N \end{pmatrix}$ 得到 brane 平均坐标.

若要让理论有 Translation Sym 则 $[\phi^a \phi^b]=0$

写成 Matrix形式 $\langle\phi\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_N \end{pmatrix}$ 几何直观:



于是可使有 Potential的导数是 Translational Sym

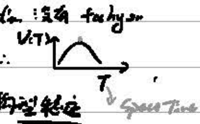
• 当 $\langle\phi\rangle = \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_N \end{pmatrix}$ 代表 $U(N)$ Gauge Sym is broken. 最后就N个 brane 可以 $U(1)^{\oplus N}$

D-brane in SuperString

D brane in bosonic string: 一直有不稳 Tachyon

但 进入 Superstring: D-brane of certain dim 没有 tachyon

tachyon 即 不稳定态 ∴



没有 Tachyon 意味着 结构稳定 → Space Time

Claim: ① 没有 tachyon的 D-brane有 conserved charge.

② World Volume theory 是 supersymmetric的.

Low energy Theory

开弦上的场除了 A_a, ϕ^a 还有 massless fermions, SYM

Rmk: bosonic part of massless closed superstring 的 Spectrum 而 SuperString Part (Type IIB)

All called RR field

当前的…… $h_{\mu\nu}$ $B_{\mu\nu}$ ϕ 还有
$$\begin{cases} \text{IIA}: & C^{(1)}_{\mu} \quad C^{(3)}_{\mu\nu\rho} \qquad + \text{massless Fermions} \\ \text{IIB}: & \chi \quad C^{(2)}_{\mu\nu} \quad C^{(4)}_{\mu\nu\lambda\rho} \end{cases}$$
($C^{(4)}$: self dual.)

N-form field:

$A = A_\mu dx^\mu$

$F = dA$

$C^{(n)} = \frac{1}{n!} C^{(n)}_{\mu_1 \cdots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_n}$ (fully anti Sym)

Rmk: 这些 field (除了 fermionic field) 都是 Bosonic field (Integer Spin)
而这些 field 可由 bosonic string or fermionic string 的 mode 产生

Field Strength:

$F^{(n+1)} = d C^{(n)}$ 则 $\mathcal{L} = -\frac{1}{2 \cdot n!} F_{\mu_1 \cdots \mu_{n+1}} F^{\mu_1 \cdots \mu_{n+1}}$

Gauge Sym:

$C^{(n)} \to C^{(n)} + d\Lambda^{(n-1)}$

由于 $d^2 = 0$

$\therefore$ F 是 Gauge Inv 的

这些反对称性源自 Indices 的反对称, 和 Space Time 的反对称不同.

- 由于满足 Gauge Sym 所以有相应 n-form 的守恒荷

n-form field & Particles:

对于 1-form field A, 它的 Source 是 pt particles

$\int_C A_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} \cdot d\tau = \int_C A$ → Pull back of A to C

对 P form obj. 产生 P+1 form field

$$\int_{\Sigma_{p+1}} C^{(p+1)} = \int d^{p+1}\xi \; C_{\mu_0 \cdots \mu_{p}} \frac{\partial X^{\mu_0}}{\partial \xi^0} \cdots \frac{\partial X^{\mu_{p}}}{\partial \xi^{p}}$$

这里 X^μ 是 Σ 在时空中的嵌入　Σ 是 P 维 brane 扫出的 P+1 维体积

- Conserved Charge

  1维: 0维带电粒子与 1-form field 耦合 → Charge Conserve

? p+1维: p维物体与 p+1 form field 耦合 会产生守恒荷

Claim: obj with minimal charge on it is stable

→ Nothing to decay.

- Monopoles:

  Mathematically 定义 Charged obj:

- 2-form $*F = \tilde{F}$ (E ↔ B)

  F 与 e couple

  则 $\tilde{F}$ 与 g couple

- n-form:

  $(d\tilde{C})^{(D-n-2)} \equiv * dC^{(n)}$

  Couple 一个 D-n-3 的 obj to $\tilde{C}$

  这便是一个 magnetic obj

对于 IIA, IIB Super String 中的 n-form field 可由一些特殊 obj coupled with

Claim: 这些 couple to R-R 场的东西就是 D-branes

而且 couple 后 这些 brane 就稳定了.

IIA	electric	magnetic	IIB	electric	magnetic
$C^{(1)}_{\mu}$	D_0	D_6	$C^{(2)}_{\mu\nu}$	D-String	D_5
$C^{(3)}_{\mu\nu\lambda}$	D_2	D_4	$C^{([illegible])}_{\mu\nu\lambda\rho}$	D_3-brane	

D_3-brane → magnetic + electric obj 即 self dual

Claim: 这里的 Couple to D_3 obj

但没有 Conserve charge claim that 会出现 tachyon

所以 brane 不稳定.

而对应的情况

由于有 Conserve charge

于是这种 Coupling 让 D-brane 稳定

描述 Charged Branes 可以作 extended Gauge field 上的 solution

关于 Self Dual:

BG为10维. $F^{(5)} = *F^{(5)}$

而若 $F^{(5)} = dC^{(4)}$

则 $C^{(4)}$ 为 self dual four form

· Rank on D_3 brane for $C_+^{(4)}$

有 4 Dim World Volume.

On these stable branes. 有 SYM theory

即 D_3 branes 上 共有 $N=4$ SYM in 4-dim

· New Perspective: D-branes as spacetime geometry

D brane 会将 Spacetime deform

e.g.: 考虑一个 charged particle 在 4d 时空 $r=0$ (经典EOM求RN解)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

这个理论有 GR 和 YM 部分 描述 带电粒子

EOM: $\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \\ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G\, T_{\mu\nu} \end{cases}$ → Solve the eqn can see how charged particle deform space-time

j 仅有 $j^0 = q \cdot \delta(\vec{x})$

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{particle} + T^{\mu\nu}_{(A_\mu)}$$

↓

$T^{\mu\nu}$ 中 仅 $T^{00} = m\,\delta(\vec{r})$

Solution: $A_0 = \frac{q}{4\pi r}$ or $\int_{S^2} *F = q$ (Field Solution)

引入度规 $ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)(dr^2 + r^2 d\Omega_2^2)$

eqn: $f(r)$, $h(r)$ ⇒ Reissner-Nordstrom Metric

类似 Magnetic Charge Particle

$$\int_{S^2} F = g.$$

这是 Einstein Eqn 求解 metric.

Dirac Quantization: $qg = 2\pi n$

Claim: 可以完全套上面 steps 推广 (推广到 Brane Obj)

对 D_3 brane 做上述推广，在 low E 下 经典 Super Gravity

D_3 brane in IIB Supergravity: $(D=10)$

IIB SUGRA: low E effective theory for massless modes of IIB superstring

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G_N^{(D=10)}} R + \cdots$$ Generalized gauge field term

- 关于 G_N:

  因 dim $=10$, 则 $[G_N] = [L^8]$ claim

  $\because G_N \propto g_s^2$

  $\therefore G_N \propto g_s^2 \alpha'^4$

  - Claim: $16\pi G_N = (2\pi)^7 g_s^2 \alpha'^4$

1. regime of validity of this type IIB SUGRA: $g_s \ll 1$

   这是因为 Loop correction 很小 since $g_s \ll 1$.

   若 g_s 很大 Loop Correction 很大

   • 意味时空有很大涨落.

   这时不再用 Classical Gravity (even super gravity?)

2. low E: $E^2 < \frac{1}{\alpha'}$

   这样激发的都是 massless 的

SUGRA 的 Regime

3. Curvature $\ll \frac{1}{\alpha'}$

Claim: $\frac{1}{\alpha'}$ 给出弦的曲率 (Some order)

的条件意味 → 可将弦视作 Point Particle (That's what SUGRA does)

理论上应该让 Z. Curvature 变小

但实际上是让 Z. Curvature Chosen as what we like and let $\alpha' \to 0$

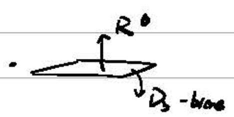
于是 SUGRA 成立条件: $\alpha' \to 0$ $g_s \to 0$

研究 D3 brane 情况

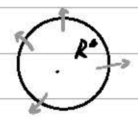
- D3 is charged under $C_4^{(4)}$

由于 $C_4^{(4)}$ 是 self-dual 的

于是 D_3 有2种 charge



于是 Transverse Direction 是 R^6 的



可以在高维空间中只表示 D_3 brane

包着它的是?5维球面,用 $S^{(5)}$ 表示

然后类比之前 操作

$$g_e = \int_{S^5} *F^{(5)} \qquad \int_{S^5} F^5 = g_m$$

而由于 self dual Condition $*F^5 = F^5$

$\therefore g_e = g_m$ claim 这是 BPS Solution

Dirac Quantization Condition

$q g = 2\pi n$ 可推广到高维

结论: $g_e = g_m = \sqrt{2\pi}$ (元 电/磁荷)

N^{e} $= \sqrt{2\pi} N$

- Tension of D_3 brane:　　　BPS性质: $\frac{\text{charge}}{\sqrt{G_N}}$

$$T_3 \propto \frac{1}{g_s} \qquad \text{Calculate} \cdots \quad \frac{q_3}{\sqrt{16\pi G_N}} = \frac{N}{(2\pi)^3 g_s \alpha'^2}$$ → 量纲

T_3 ~ Mass of brane (差一个尺度因子 1/4)

$q_3 \cdot g_3$ ~ Charge of brane

在这些 uniquely determined 后 F^5 唯一确定 而 $C_4^{(m)}$ 也唯一确定

放入 Einstein Eqn 可解

Symmetry:　Poincaré $(1,3) \times SO(6)$

预设 ds^2 解

$$ds^2 = f(r)(-dt^2 + d\vec{x}^2) + h(r)(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2)$$

↳ S_5 surrounding the brane

用 Einstein Eqn 确定 $f(r)$, $h(r)$

$f(r) = H(r)^{-\frac{1}{2}}$

$H(r) = 1 + \frac{R^4}{r^4}$ ⟶ Claim: transverse space R^6 中的 harmonic func

$R^4 = \frac{4}{\pi^2} G_N T_3 N = 4\pi g_s N \alpha'^2$

Lec 16 Geometry of D-brane and AdS / CFT Conjecture:

$ds^2 = H^{-\frac{1}{2}}(r)(-dt^2 + d\vec{x}^2) + H^{\frac{1}{2}}(r)(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2)$ D_3 brane 的 Geometry

$H(r) = 1 + \frac{R^4}{r^4}$

$R^4 = \frac{4}{\pi^2} G_N T_3 N = 4\pi g_s N \alpha'^2$ ← α'^2 是二次 Dimension

类似 Schwarzschild

但由于 3+1维 对应的 Translational Sym 这里是 T_3

Physics of Metric

① 考虑 $r \to \infty$ 时 $H = 1$ 此时 得到了 Minkowski

② $r \gg R$

$$ds^2 = f(-dt^2 + d\vec{x}^2) + h(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2)$$

$f \sim 1 - O(\frac{R^4}{r^4})$ 高维空间 库仑Law: 4维 $\frac{1}{r^2}$

$h \sim 1 + \frac{R^4}{r^4}$ 6维 $\frac{1}{r^4}$

Claim. 由于 Charge of brane 和 gravity 比较有 long range potential.

③ $r \sim R$ · 开始显著 space time deformation Gravitational Effect become Strong

Claim curvature $\sim R^{-2}$

Region of parameter:

$$4\pi g_s N \alpha'^2 = R^4$$

由于 Curvature $\sim \frac{1}{R^2}$ 且 Curvature $\ll \frac{1}{\alpha'}$

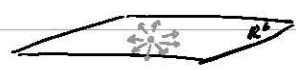
$\therefore \alpha' R^{-2} \ll 1 \Rightarrow g_s N \gg 1$

但 $g_s \ll 1$

④ $r \to 0$ $r = 0$ 时 回到了 brane.

此时 $H = \frac{R^4}{r^4}$, $ds^2 = \frac{r^2}{R^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{R^2}{r^2} dr^2 + R^2 d\Omega_5^2)$

考虑这样一个 Case:



· 这里的 arrow normal to S_5 (在 R^6 中)

所有 arrow 都在"平面"内, 这是 Embedding Diagram

一般的 flat space $dr^2 + r^2 d\Omega_5^2$ 当 $r \to 0$ $r^2 d\Omega_5^2 = 0$

但这里，有 $R^2 d\Omega_5^2$ 这个变成 Constant Part. S^5 becomes constant Radius

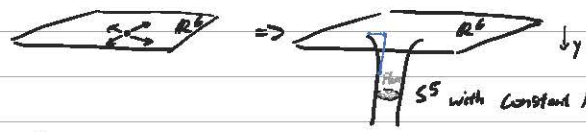
② $\frac{dr^2}{r^2} = dt^2$, t: proper distance. 则 $t \sim \log(r)$ 则 $r \to 0$ $t \to -\infty$

r=0 sits infinite proper distance away

Embedding Diagram:

图上的曲线用以描述 Curvature. • 垂直上代表 Purpose Radius.

• 这里不再在什么坐标 Coord y 这是 Embedding Space Time 在这些代表我们看不到 Source 但能看见 flux



Claim

引入 D_3 brane 的 "back reaction" 后 D_3 brane 消失了.

但剩了 Curved Geometry and flux

• 看一下 AdS_5 的 metric:

$$ds^2_{AdS_5} = \frac{r^2}{R^2}(-dt^2 + dx^2) + \frac{R^2}{r^2} dr^2$$

于是 靠近 brane 的过程 发现: brane is no longer there, 那里出现了一个 throat 明显几何是 $AdS_5 \times S_5$ 无穷远还是平直的

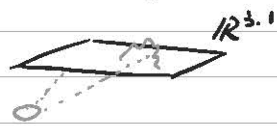
Mass is gone (sitting infinitely distant away) 我们看不到 Source. 可以看到的是 Curved space-time 和 flux

这是 Perfect Solution of Einstein Eqn.

• 现在对 D_3 branes 有 2 种描述

(A): D-brane are flat Minkow space where open string ends

brane plot.



• 即 flat BG Space Time 中有个 brane 上面有 String Excitation.

• Closed String 自由 brane. open string 相互作用.

(B):

有 spacetime metric $ds^2 = \frac{r^2}{R^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{R^2}{r^2}dr^2 + R^2 d\Omega^2$

\+ F_5 flux on S^5

Claim: 这个体系只有 closed strings

这里由于没有 (Impossible to reach) D-brane
所以在时空中传播的只能是 Closed String

1 start with D-brane (Leave the brane. Just some charged massive obj

2 Achieve New Geometry

3 Quantize string theory in the space time with new geometry (New Target Space)

Claim: A = B

recap the dual description of closed & open string:

① exchange closed string — 由closed string 存在，一个brane 之所以能感受到另一个brane 是由于closed string 进行了传递

② Loop correction of open string — 由于没有 closed string，需要引入开弦在单圈图层面的效应，于是这描述平面附近膜相互作用的圈图修正.

Claim: ① A 与 B 是等效描述

② 对 α' g_s 无限制 (在任何给定 α' 和 g_s 可以将 A=B 推广到任意 α', g_s

Maldecena: 在 low E limit 下 A = B 给出 AdS/CFT

Low E Limit: 由于 $\alpha' E^2$ matters.

fix E take $\alpha' \to 0$ (Claim 这等效于 α' 固定 $E \to 0$)

对 A 的 Low E limit:

Claim: open string → $\mathcal{N}=4$ SYM with $U(N)$

由 $D=4$ $g_{YM}^2 = 4\pi g_s$ (之前有 g_{YM} 与 Dimension 公式)

Closed string: Low E 下 有 graviton, dilaton, ····

Coupling between ① 元或者开闭弦 在 Low E 极限下 ~ G_N

② 闭弦相互作用

而 $G_N \propto g_s^2 \alpha'^4$

∴ 在 Low E limit 下 ($\alpha' \to 0$) $G_N \sim 0$

Open Closed String Will Decouple!

讨论电子时 (即 $\bar{\psi}\gamma A^\mu$ field 的激发?) 不用考虑 Gravity 因为 decouple 了

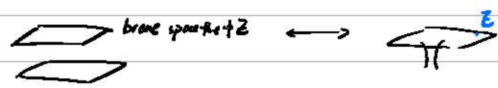
总结: $E \to 0$: 我们有 $\mathcal{N}=4$ SYM, free graviton + 其它 free particle

(B):

$$ds^2 = H^{-\frac{1}{2}}_{(r)}\left(-dt^2 + d\vec{x}^2\right) + H^{\frac{1}{2}}_{(r)}\left(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2\right)$$

$$H(r) = 1 + \frac{R^4}{r^4} \quad R^4 = \frac{a}{\pi^3} G_N T_3 N = 4\pi g_s N \alpha'^2$$

为了定义这个能量的 E 要 specify Time



$AdS_5 \times S^5$ 无穷远处 Minkowski Spacetime 的 E

为了对比 2 个, 要明白 E 是什么

(A) 中的 E: defined wrt t. i.e. time at $r=\infty$

(B) 中的 E: Local proper time τ: $d\tau = H^{-\frac{1}{4}} dt$.

$$\Rightarrow E_\tau = H^{\frac{1}{4}} E$$

于是在A图中 E small，在 B图中 E_τ 不一定小。

(B)图中 ① for $r >> R$ $H \sim 1$

low E limit 下 $E^2\alpha' \to 0$

=> All massive closed string decouple

② for $r << R$ $H \sim \frac{R^4}{r^4}$

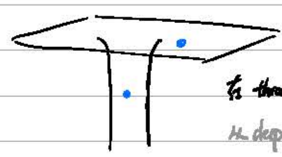
则 $E_\tau^2 \frac{r^2}{R^2}\alpha' \to 0$

即 $E_\tau^2 \frac{r^2}{\sqrt{4\pi g_s N}} \to 0$ ☆ 已写无 α'

这个等式恒成立 as long as $r<<1$

$E^2\alpha' \to 0$ 的是 E_τ，$E_\tau = H^{\frac{1}{4}} E$ （• 与r有关）

For any E_τ in low energy limit 上式成立



在 throat 里 deep enough 时 总可达到 low energy limit

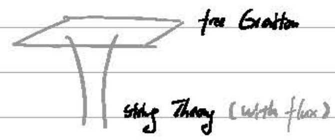
从 deep enough 位置发射出来，在到 infinity 时总有足够的红移

• Conclusion: $r \to 0$ 得到 $AdS_5 \times S^5$ 的几何

low E limit 下，B图含有 $r \to \infty$ 处的 free graviton + full string theory in $AdS_5 \times S^5$

而且2者 Decouple

low E mode: Throat 非常深的地方. Graviton 在相对 "Infinity" 处.



A　　　　B

$\mathcal{N}=4$ SYM + free Graviton　　ⅡB String in $AdS_5 \times S_5$ + free graviton

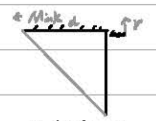
猜 $\mathcal{N}=4$ SYM with $U(N)$ = ⅡB in $AdS_5 \times S_5$

Field Theory —— String Theory

AdS / CFT

AdS: $ds^2 = \frac{r^2}{R^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{R^2}{r^2} dr^2$　　　(AdS_{d+1})

Warped Minkow d.



r→∞ 时的 Space Time Boundary.

Radil Direction

性质： · 常负曲率空间

· 最大对称空间

· 满足带Λ的 Einstein Eqn: $\mathcal{R}_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN}(R - 2\Lambda) = 0$

这里 $\mathcal{R}$ 代表 Ricci —

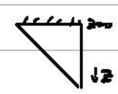
Claim 当解得 $\begin{cases} \mathcal{R} = -d(d+1)R^{-2} \\ \Lambda = -\frac{1}{2} d(d-1)\frac{1}{R^2} \end{cases}$

而 4维 Ricci Tensor 写作:

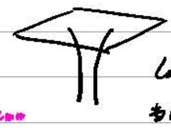
$\mathcal{R}_{MNPQ} = -R^2 (g_{MP} g_{NQ} - g_{MQ} g_{NP})$　(最大对称空间的性质 — 不同寻常)

· 换坐标: $z = \frac{R^2}{r}$

$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}(-dt^2 + dx^2 + dz^2)$



P.S



Low Energy 之的空代在 Deep Throat

--- ewa 当 Decouple 掉 Minkowski Boundary 后

仅留了一个 Scale inv 的 throat

仅有在 $r \to 0$ 时才 decouple massive modes

在 Decouple massive modes 后可承认选择一个环境了讨论 $r \to \infty$

AdS (Poincaré Patch) 之 Global AdS

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2) \quad ①$$

or

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} \; ---- \quad ②$$

仅能描述 Poincaré Patch of AdS

Global AdS_{d+1} 由 (2,d) 的 Hyperbolic 描述.

$$\begin{cases} ds^2 = -dX_{-1}^2 - dX_0^2 + d\vec{X}^2 \\ X_{-1}^2 + X_0^2 - \sum_1^d X_i^2 = R^2 \end{cases}$$

渐近明显 (这个 Surface defines AdS)

描述 AdS 方法

1. Poincaré Coordinate $r = X_{-1} + X_d$, $x^\mu = R\frac{X^\mu}{r}$ 限定 $r > 0$

   则与 ② 一致

2. Global Coord:

   定义 $\sum_{i=1}^{d} X_i^2 = r^2 R^2$ (a)

   则 $X_{-1}^2 + X_0^2 = (r^2+1)R^2$ (b) ← 这为新 Polar Coord 用 τ 标记. τ: $[0, 2\pi]$

   Interpretation: fixed R 对 b 式是 Circle 对 a 是 Sphere

   引入 Polar / Spherical Coord

   $$ds^2 = R^2\left[-(1+r^2)d\tau^2 + \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega_{d-1}^2\right]$$

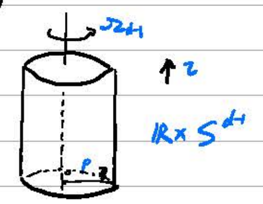
   这里将 τ 从 $[0, 2\pi]$ extend to $[-\infty, \infty]$

   - extended AdS ∵ AdS 只有 $[0, 2\pi]$ 后还是有无穷多个 AdS copy

   令 $r = \tan\rho$. $\rho: [0, \frac{\pi}{2}]$ (对应 $r: 0, +\infty$)

   可得 $$ds^2 = \frac{R^2}{\cos^2\rho}(-d\tau^2 + d\rho^2 + \sin^2\rho \, d\Omega_{d-1}^2)$$

   - 有 Conformal factor 的 Cylinder.

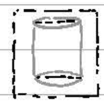


$\rho=\frac{\pi}{2}$ 时 metric blow up ∴ $\frac{\pi}{2}$ 是 Boundary.

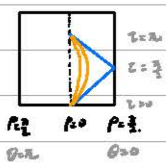
☆ 于是 Boundary 是 $\mathbb{R}\times S^{d-1}$

整个时空是 Solid Cylinder

看 Cross Section:



=>



由于 $ds^2=\frac{R^2}{\cos^2\rho}(-d\tau^2+d\rho^2+\sin^2\rho\, d\Omega_{d-1}^2)$ ——> 当 $\rho=0$ 时是 Minkowski Metric

消掉 $d\Omega$ 时 Light Propagation 与 ρ 无关

即 $d\tau=d\rho$ 即可

当 $\rho\neq0$ (Curvature Comes in) 便不再有自由的性质

而后来粒子 将被 Pull-Back by Gravitational Potential

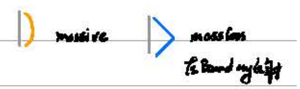
而 massive one

由于 $\frac{1}{\cos\rho}$ 在 $\frac{\pi}{2}$ 发散

所以有质量粒子到不了 Boundary.

AdS: Like a confining box (size ~ R)

里面的粒子逃不出来



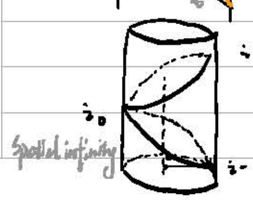
$r=\tilde{X}_{-1}+\tilde{X}_d$ $\quad X^{\mu}=R\frac{\tilde{X}^{\mu}}{r}$ (建立 Poincaré Coord 和 Global Coord 联系)

$\sum \tilde{X}_i^2=r^2R^2$

$\tilde{X}_{-1}^2+\tilde{X}_0^2=(r^2+1)R^2$ 由τ表示

于是

它其实是 Global Coord 里 Poincaré Patch:
的一个截面



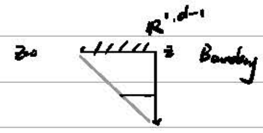
Global Coord 里有 infinity patch

Lec 17:

Review:

- AdS的主坐标系:

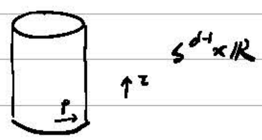
① $ds^2_{AdS_{d+1}} = \frac{R^2}{z^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2)$



每个Layer都是 $Mink_d$ 总体是 AdS_{d+1}

or 全局

② $ds^2 = \frac{R^2}{\cos^2\rho}(-d\tau^2 + d\rho^2 + \sin^2\rho \, d\Omega_{d-1}^2)$



③ $\begin{cases} X_{-1}^2 + X_0^2 - \sum_{i}^{d} X_i^2 = R^2 \\ ds^2 = -dX_{-1}^2 - dX_0^2 + \sum_i dX_i^2 \end{cases}$ AdS_{d+1} 嵌入在(2,d) Mink中

Symmetries

Isometry: 让 Metric 不变的 Transformation eg Poincaré Trans 是 (1,3) 的 Iso

- 而 AdS_{d+1} 的 Isometry GP: $SO(d,2)$ 由③的写法可看出 $X_{-1}^2+X_0^2-\sum X_i^2=R^2$ 是 $SO(\cdots)$
  显然或不破坏了 Translation Sym.
  但保留了 Lorentz Sym (由 $-dt^2+d\vec{x}^2$ 知)

- 在 Poincaré Patch 中表示这些 Sym
  Conformal GP:
  Lec17, 8:45 略.

20:

- **String Theory in $AdS_5 \times S^5$**

  - AdS_5 是一个极大对称的负曲率空间
    S^5 是正曲率的.
    于是 $AdS_5 \times S^5$ 仍是最大对称空间.
    而且我们认为是 Homogeneous Spacetime. 其中 R 作为唯一参数
    由于是最大对称空间 ∴ 一个参数 R 决定了各向同性一致 Curvature 性质. ——> 1个 R

  • Assumption:
    AdS_5 和 S^5 用同一个 R 刻画

- 这个空间的 Theory (参数)
  String Theory: $\frac{\alpha'}{R^2}$ dimensionless g_s String Coupling para   该理论只有这2个基本参数

  (Gravity): $G_N = (2\pi)^7 g_s^2 \alpha'^4$. 于是又可由 $\frac{G_N}{R^8}$ $\frac{\alpha'}{R^2}$ 构建理论

  P.S. $AdS_5 \times S^5$ 中不论是 AdS_5 中的 Curvature 与 S^5 中刻化参数是同个 R

- Classical Gravity Limit: $g_s \to 0$ $\frac{\alpha'}{R^2} \to 0$
  - $g_s \to 0$: Loop Correction Limit
    时空本身的量子涨落可忽略
  - $\frac{\alpha'}{R^2} \to 0$: Point Particle Limit
    由于 α' 代表 $[\text{弦尺度}]^2 \ll R$
    ∴在 $AdS_5 \times S^5$ 下弦像点粒子

  在这2个 limit 下 得到 Gravity
  而且是 type IIB Gravity

- Classical String Limit:

  $\frac{\alpha'}{R^2}$ arbitrary　　　　　　$g_s \to 0$

  弦而不能看成 Point like Particle　　　　当弦耦合时量 Quantum fluctuation 很小

- AdS_5　　S^5　不同的拓扑结构：

  non-Compact (Infinite Vol)　Compact (finite Vol)

  S^5：由于 Compact ∴ 可将 10-dim field 在 S^5 上展开成 Harmonics

  eg：一个场在 $AdS_5 \times S^5$ 中的标量场

  $$\phi(x^\mu, z, \Omega_5) = \sum_l \phi_l(x^\mu, z)\, Y_l(\Omega_5)$$

  (x^μ, z: AdS₅ Part; Ω_5: S^5 Part)

  $Y_l(\Omega_5)$：展开成 S^5 上的球谐函数

  $\phi_l(x^\mu, z)$ → A tower of fields in AdS_5.

  rmk: • Tower of massive modes

  Higher Harmonics develope mass

  由于 Curvature of S^5 以及 Higher modes 破坏 Sym. 带有 dependence on x^μ, z.

  所以产生 Mass.（只产生不能消除）

  Lowest mode 保持空间的对称性 → Massless.

  且该操作对任意 field 都可行

  • Claim ∴ 有 massless Graviton 可以长距离传播.

  ?　Gravity 在 long distance 上是 essentially 5-dimensional. S^5

  [ex] 33min ?　Compact 部分通过 reduction 获得 mass

- Dimension Reduction.

  - S_5 Part 的 Einstein Hilbert Action

  $$\frac{1}{16\pi G_{10}} \int d^5x\, d^5\Omega \sqrt{-g_{10}}\, R_{10} = \frac{V_5}{16\pi G_{10}} \int d^5x \sqrt{-g_5}\, R_5$$

  ($\int d^5x \sqrt{-g_5}\, R_5$: AdS part.)

  • R_5 不依赖 S_5 即 Kaluza Klein 理论 ... 解出 $Y_l(\Omega_5)$ 部分

  之后被积分剩余部分是 R_5

  最后 $S = \frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x \left[\mathcal{L}_{grav} + \mathcal{L}_{matt} \right]$

  • 定义 V_5 = Volume of S^5　　$G_5 = \frac{G_N}{V_5} = \frac{G_N}{\pi^3 R^5}$

N=4 SYM

3+1 dimension 中

field Content: A_μ, ϕ^i, $i=1\cdots6$

χ^A_α $\quad A=1,\cdots4$ $\quad$ 在 3+1 维里 Fermions 都是 Weyl Spinor

α: spinor indices

U(N) Gauge Theory 下 所有这些场都有相应的 U(N) adjoint representation 即每个场都是 N×N 矩阵.

关于 Susy: A_μ 有2个 On shell dof (考虑 Gauge) Bosonic 一共8个 Fermionic 亦是 (每个 fermion 有2个 Compon

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{g_{YM}^2} Tr\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\phi^i)^2 + [\phi^i,\phi^j]^2\right) + \cdots$$

- Claim, 这里的 U(1) Part Decouple. $U(N) \to SU(N)\times U(1)$

  U(1) 部分表示 Identity matrix. SU(N): Traceless Matrix

  对 U(1) Part 所有 Commutator Vanish 对 U(1) 描述 Free Theory 代表 Branes 的 COM motion.

Properties of the theory.

① N=4 Susy

- N=1 代表 描述对称性的 charge 由一个 Weyl Spinor $\quad$ N=4 代表四个 Weyl Spinor 参与其中
- N=4 是 maximally allowed sym for 3+1 dimension

② g_{YM} 是 dimensionless classically.

Claim: QCD 是 dimensionless 的 classically

Quantum mechanically 这个 coupling change with scale.

但 N=4 SYM 不这样. Coupling 不随 scale 改变. 仍是 dimensionless 的.

更进一步:

β function of SYM

QM level, g_{YM}^2 的 β-function 是 0 $\quad$ 即 g_{YM}^2 是 dimensionless 的不随能标跑动 (QCD 中不是这样)

说这个 Theory 是 Conformally invariant $\longrightarrow$ CFT

• $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ 时 Conformal Transformation　　* $g_{\mu\nu} \to \lambda(x) g_{\mu\nu}$

　　连续：①平移 ② Lorentz ③ Scaling ④ SCT

　　离散：$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu}}{x^2}$ (inversion)

　Claim: 这里的 Transformation 与 AdS 中的 Transformation 有 1-1 correspondence.

　这里的 Conformal Group: $SO(d,2)$

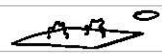
此外还有一个 $SO(6)$ 的 Global Sym $\longrightarrow$ Rotate ϕ^i and X^A

由于 $N=4$ SYM 定义在 D_3 brane 上 ∴ transverse space 有 Rotation Sym.

还考虑 Susy：$PSU(2,2|4)$

P.S. $N=4$ SYM 是有最大对称性的 theory.

Summary

• 从  D-brane + String 开始

• Low E limit 下 给出 $N=4$ SYM with $SU(N)$ + decoupled $U(1)$ + decoupled graviton

另一种视角：

这里的 Low E limit 代表 drop down in the throat

Low E limit 下给出 String theory in $AdS_5 \times S^5$

+ decoupled graviton

+ COM for brane　(brane 互相移动 作为一整体)

• 看 Picture 1 中 除去 Graviton 和 $U(1)$ — COM part. 给出 Interaction Part.

即：$N=4$ SYM with $SU(N)$ on $R^{1,3}$ = IIB string in $AdS_5 \times S^5$ ↳ in Poincaré Patch

Claim: N 与 $AdS_5 \times S^5$ 上的 flux 对应

Rmk:

① $\mathbb{R}^{1,3}$ 是 AdS_5 的 boundary.

② $AdS_5 \times S^5$ 可做 dimension reduction 做 S^5 的 spherical Harmonic reduction 可 reduct 到 5-d gravity theory

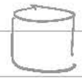
于是 5-d Gravity Theory = 4d CFT live on its boundary.   Realization of holographic Principle

这一部分的论述 大 N 展开后 YM in U(N), SU(N) ⟹ string 的实现.

• Predictions:

将上述 Correspondence 推广. 从 Poincaré 推广到 Global.

IIB String in Global $AdS_5 \times S^5$ = $\mathcal{N}=4$ SYM on $S^3 \times \mathbb{R}$



即 Cylinder 的边界

Part 3 Duality Zoo Box

Lec 17

§3.1 IR/UV Connection

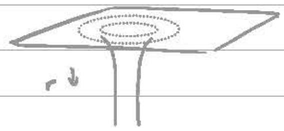
Realization of Holography.

recap: AdS_5 Gravity $\longrightarrow$ $\mathcal{N}=4$ SYM in 4d.

- Q: 为何多了一个维度. 怎么理解这的物理?

Deeper r & Lower E (Sort of dim reduction)

Answer: Low E 实现的给了 Answer ∵ 要 Go to Low E limit 则要 $r \to 0$



- 也就是说 r direction "Transverse to SYM"

  而根据 $z = R^2/r$ 则 $r \to 0$ 对 $z \to \infty$

  "r direction can be considered as representing the energy scale of YM theory"

Small r = big redshift ~ smaller energy
∵ small energy 代表走"下面" 让物理更大

- 因只有 r 足够小时才能认为 AdS part 和 Mink part Decouple
  才能有上 $AdS_5 \times S^5 \sim \mathcal{N}=4$ SYM Correspondence.

- 换成另一套坐标. Reinterpret 这个对应.

Bulk & Boundary

令 $z = \frac{R^2}{r}$ 则 $ds^2 = \frac{R^2}{z^2}(dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2)$

- 坐标: $x^\mu(t, \vec{x})$: 定义在 Boundary 上 · (用于描述 YM 的理论)

- Bulk Para 与 Coord 关系.

  (Bulk 中 local proper-time and length at defined z)

$$\begin{cases} d\tau = \frac{R}{z} dt \\ dl_{loc} = \frac{R}{z} dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_{YM} = \frac{z}{R} d_{loc} \\ E_{YM} = \frac{R}{z} E_{loc} \end{cases}$$

- P.S. 似乎这是 Scaling Para.
  看看能量…
  于是说 z 的 … 的 …
  就有了 renormalization Group flow.

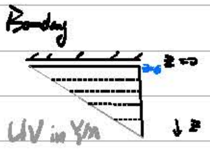
"Geometrize RG Flow in Field Theory"

• Process in Bulk & Boundary

- Loc 代表某纵图局时空点. 于是 Same process at different z in Bulk, E_{loc} d_{loc} 相同.
- 但 Boundary 上的观察者看到的 $E_{boundary}$ (我们记作 E_{YM}) 与 z 有关.

→ Same Process in different space: $\begin{cases} E_{YM} \propto \frac{1}{z} \\ d_{YM} \propto z \end{cases}$

IR & UV Connection



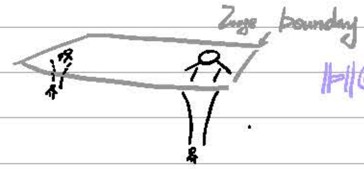
Bulk Proc:		Boundary Proc:		
$z \to 0$,	Go to boundary is by defn IR	$E_{YM} \to \infty$	$d_{YM} \to 0$	UV in YM
$z \to \infty$	UV	$E_{YM} \to 0$	$d_{YM} \to \infty$	IR in YM

(并不 100% 严谨.)

Rmk: 对 Typical Gravity Process 可以由 typical curvature scale 描述

$\begin{cases} E_{loc} \sim \frac{1}{R} \\ d_{loc} \sim R \end{cases}$ 代入 则 YM 中 $\begin{cases} E_{YM} \sim \frac{1}{z} \\ d_{YM} \sim z. \end{cases}$

Picture:



HOLOGRAPHY

- Rmk:

① Putting Cut Off. 计算 AdS 时空体积是 $\int \sqrt{-g} \sim \infty$

主要由 $z \to 0$ 贡献 于是 设定 Cut off $z = \epsilon$ Holographic Bound.

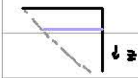
Putting IR Cut off in AdS at $z = \epsilon$ $\longleftrightarrow$ in the boundary introduce UV cutoff at $\delta x \sim \epsilon$

or say energy cut off at $E \sim \frac{1}{\epsilon}$

② 对 Conformal Theory, 这里的 Picture 能够描述. 由 $E \sim \frac{1}{z}$. Field Theory 的 scale inv → 可任意高低能性 对应于 $z \to \infty$

③ 但 对 Theory has a Gap:

If the corresponding space the 'ends' at a finite proper distance ⟷



在Poincaré Patch中z可趋向∞.

但在Global AdS中并不能无限趋于$\rho=0$

"直接用上面 AdS CFT关于UV IR关系"

ρ 可有限的趋于0代表 AdS UV Process. 于是 Correspond to CFT 的IR Process

由于ρ有限的趋于0代表 CFT不能有 Arbitrary low energy excitation.

- 于是存在一个 Gap!

即 $R\times S^3$ 的 Boundary 上的 CFT有 mass Gap

- 另一方面: If Boundary Theory has mass gap then the Bulk theory has to be end somewhere

- Rmk: Theory on R^3 & S^3 different a lot

因为 S^3 上有 mass gap $\mathbb{R}^{d-1}$ 上没有 Different Geometry, Different Physics

Lec 18:

§ 3.1.2. Matching Sym

- Rmk: Isometry is a subset of diffeomorphism which is Local Sym.
- Isometries 代表 space the local transform

- $\mathcal{N}=4$ SYM ⟷ IIB String in $AdS_5 \times S^5$

conformal Sym: $SO(d,2)$ [Global Sym of spacetime] ⟷ Isometry of AdS_5 : $SO(4,2)$

$SO(6)$ [Global Sym. 不会直接 brane 的 R 对称 Sym] ⟷ Isometry of S^5 : $SO(6)$

Susy : 4 + 4 ⟷ Claim: 这也有 same amount of super sym

Susy 生成元 ↙ ↘ 由于 Conformal Sym 与 Susy 不 Commute 要以再加上新 Sym. claim: 4 个

[$\mathcal{N}=4$: 有 8 charges of weyl spinor, 因每个 Weyl Spinor 有 4 个 real components 于是总共一共 32 个 real charges]

[low E of IIB string → SUGRA]

[IIB SUGRA 中有 same amount susy, 而 SUGRA 是 Local 的 susy 于是有 same amount local susy]

Rmk: ① 可以发现 Global sym on field theory $\xrightarrow{\text{mapped to}}$ local sym on gravity side.

② 我们只关注 Isometry 原因:

$AdS_5 \times S^5$ 是 渐近的 (因此中间有 fluctuation ……)

而 Iso GP leaves the asymptotic form of the metric inv —— 而这不是 全部的 diffeomorphism

- 而一般的 Gauge Transformation or say local diff. 中它是被称 fall off quickly at infinity. 这种 "Local" 的称作 Gauge
- 而 这里的 SO(6) 是 Large Gauge Transformation ⟶ don't go to identity at ∞ 即 Global 变换.
- Local 的 Gauge redundancy 只是 种描述上的 冗余 ∴ 不会体现在我们看的 Symmetry map 里.

"Presence of Redundancy and wouldn't be correspond to the other side. Only the physical one would do"

- 由于 Global Sym map to Local Sym 对 Gravity 中对应的 Local Sym 并非一种冗余而是 Physical 的

  所以 SYM 中 映射来的 "Local" Sym 只是记作 Gravity 中 Global Sym 的 Local Part.

  所有 Local 的 都是 redundancy in description

③ 在 CFT in Mink d ⟷ AdS_{d+1} Gravity 的 Correspondence (我们讨论一般 CFT — AdS 对偶)

总有 Conformal isometry gp $SO(d,2)$ ⟷ AdS isometry $SO(d,2)$

eg $U(1)$ Global Sym ⟷ Local $U(1)$ Gauge Sym

global susy ⟷ local susy

参数对应

How URGENT

解释： Gravity + Local part 的 Global Sym 中的 Local Par

§3.13 Matching Parameter

• (D brane relation)

	$\mathcal{N}=4$ SYM		IIB string $AdS_5 \times S^5$
D-brane Solution	g_{YM}^2	=	$4\pi g_s$
D3 brane Solution	$g_{YM}^2 N$	=	$\frac{R^4}{\alpha'^2}$
用 G-Newton 表示	$\frac{\pi^4}{2N^2}$	=	$\frac{G_N}{R^8}$
Dimension Reduction	$\frac{\pi}{2N^2}$	=	$\frac{G_5}{R^3}$

$R^4 = 4\pi g_s N \alpha'^2$　R: curvature radius

Rmk: ① 关于这里的 N，在 AdS side 是 Flux，在 CFT side 是 SU(N)

② AdS side Basic Para: g_s, α'

③ 添加上面 AdS/CFT 对偶关系 + $16\pi G_N = (2\pi)^7 g_s^2 \alpha'^4$

我们得到 G_N 以及对偶参数，写成 CFT side 的 parameter

④ 关于 $\frac{1}{N^2}$ 的展开可以表示为关于 G_N 的展开。

⑤ 做 Dimension Reduction:

Dimensional Reduction on S^5: $\frac{1}{G_5} = \frac{\text{Vol of } S^5}{G_N}$

这里 $V_{S^5} = \pi^3 R^5$

• Classical Gravity Limit　($\hbar = 1$)

• QG: 由 G_N 描述

当 $G_N \to 0$　由 $G_N \propto \alpha'^4$ 如果 $\alpha' \to 0$ 时 可以忽略 QG.

(String effect not important)

但是存在 Gravity 和 Matter. 此时我们将 matter 量子化，Gravity 仍作为背景了 继续讨论

· Classical Gravity Limit = QFT in Curved Space-time

[Rigid Space-time with fluctuate matter]

对于 Classical Gravity 的参数可写作：

$\frac{G_N}{R^8} \to 0$	$\Longleftrightarrow$	$N \to \infty$	①
$\frac{\alpha'}{R^2} \to 0$	$\Longleftrightarrow$	$\lambda \to \infty$	②

物理解释:

Large N 在 String theory 中的关系.

• $\frac{G_N}{R^8} \to 0$ 即 Space-time fluctuation 压制

• $\alpha'/R^2 \to 0$ 即 $\lambda \to \infty$ 指 String Coupling

待check-?

①: recap large N in Gauge Theory. large N limit 下 fluctuation小 $\longleftrightarrow$ Spacetime Geometry 下 . Gravity→时空起伏小

②: $\alpha' \to 0$ 即 Decouple of stringy effect 是 field theory side 在 Strong Coupling

Large N Gauge Theory: 有 Planar / non-Planar Diagram

$A = \sum_{\text{topol}}$ Feynman

Feynman Diagram 不能为 Space Time 的描述

但是 当这个 Diagram Become Sufficiently Complicated 会 Emerge Space Time

具体的表现 即是 Strong Coupling，则 该图有一堆 Vertex 公而主要成 Dominate.

于是 会 somehow 得到一个 Continuum Limit.

String Coupling Limit is Described by Classical Gravity.

· 由上面的 Dual 知，在 Gravity Side. 由于退化成了 classical Gravity 于是任意的 Curved Space Time QFT 描述 而由 Correspondence，可以用 经典引力 描述 String Coupling.

当 G_N α' 不是严格趋于 0 时. 可以对 QG 做相关参数展开得到 QG Correction

于是 $\frac{1}{N^2}$ Expansion $\longleftrightarrow$ expansion in G_N (QG Correction)
$\frac{1}{\lambda}$ Correction $\longleftrightarrow$ expansion in $\frac{\alpha'}{R^2}$

进一步. 考虑 Classical String Limit:

$N \to \infty$	$\longleftrightarrow$	$G_N / R^8 \to 0$
λ finite	$\longleftrightarrow$	α' finite

← 而这即是 't Hooft Limit.

• Claim:[1] 对 G_N 的修正 ~ 对 $\frac{1}{N}$ 的修正

[1] large N limit 下 系数的引入

Matching Spectrum:

- 考虑 Semi Classical Gravity: curved space QFT
- 直接用 AdS/CFT

若2个东西是 Same Theory 则 Spectrum or say Hilbert Space 有 1-1 对应

考虑: Boundary — Bulk

关于 Representation

State: 由对称性, CFT的共形 GP: SO(d,2) 对 Hilbert Space 是在 Conformal GP的一个 Representation.

Bulk中也应该由 SO(d,2) 对应一 Hilbert Space的 Representation

两个 Hilbert Space 的 Representation 理应 Match

Operator: Boundary 的 Operator 应该 Transform follow SO(d,2) — 1-1 mapped — Fields in Bulk Transform under same Lie Gp 于是应该 1-1对应

Eg: Scalar Operator $\leftrightarrow$ Scalar field ; $J_\mu \leftrightarrow A_m$; $T_{\mu\nu} \leftrightarrow h_{mn}$

Rmk. Boundary 用 μ, ν Bulk 用 m, N for higher dimension space.

Claim: 我们已经在 GP Theory Check 过了

P.S YM live on Minkd

而 Minkd 正好就是 ∂AdS

于是 Postulate 有一个 Relate Bulk Boundary 关系

- 这里不具体 Match field & State 仅写出几个重要的 Operator Field Map.

$\mathcal{N}=4$ SYM — IIB string in $AdS_5 \times S^5$

$\hat{I}_{N=4} \longleftrightarrow$ dilaton ϕ

可将 I 中的所有系数看成为 Operator

2 $SO(6) : J_\mu^a \longleftrightarrow A_M^a$

SYM中 Global Sym的守恒流 $\longleftrightarrow$ $AdS_5 \times S^5$

· 做 dim Reduction时 S^5 上的 $SO(6)$ GP引起

实在 AdS_5 中 Pure Gauge Field 的个

Symmetry一个 Gauge Field

3 $T_{\mu\nu} \longleftrightarrow h_{MN}$ (metric)

↳ 不仅对称性上的自然对应，还有很好的物理解释。

· 由 Operator & Field 对偶可知 量子对应 — 两边的 Quantum Number 相同 etc 而进一步当给看 Path Integral

· Given an Operator O 可以 Deform 原 Lagrangian：在 $\mathcal{L}$ 中加入 $\int \phi_0 O(x) d^4x$ [ϕ_0: Source]

· 当 ϕ_0 = Const. 此项相当于改变 Coupling of $O(x)$

· What's This Operator Correspond to in Bulk ?

· 考虑 $g_{YM}^2 \longleftrightarrow g_s$

而 $g_s = e^{\langle\Phi\rangle}$

rmk: Φ 是 fluctuate 的，并且 $\langle\Phi\rangle$ 一般对 $\Phi|_{infty}$ 而 AdS 中 $\langle\Phi\rangle$ 指的 $\Phi|_{\partial AdS}$

由于 Φ 在 fluctuate 的 故 $\langle\Phi\rangle$ 存在，但看到 infty 的场 → 不变。

于是有：

$g_{YM}^2 \longleftrightarrow \Phi_{\partial AdS}$

↑

Coupling (Source) for $\mathcal{L}_{N=4}$

· 若 Deform Boundary：在场中加一些东西

↓

$\int \log \mathcal{L}_{N=4} \longleftrightarrow$ Change Boundary Value of Φ

We can Deduce : ① $\Phi \longleftrightarrow \mathcal{L}_{N=4}$ (Cla. 自对偶的 Group Theory … 推导)

② $\int \phi_0 \mathcal{O}$ in the boundary theory ⟷ Bulk field ϕ dual to $\mathcal{O}$ has a boundary value $\phi_0(x)$

P.S. 这里的 dual can even break Sym on CFT as well as AdS_5

结合上面这种 Comment 可得到这种 identification 让 $\hat{O} \leftrightarrow \Phi$ Natural. (特别是 Vector Tensor field

* Any Conserved Current in Boundary Theory Must Dual to some gauge field in Bulk
  (Stress Tensor) (Metric)

J^μ PF:

考虑 Current $J^\mu(x)$, 引入 Source $a_\mu(x)$ 则考虑 $\int a_\mu(x) J^\mu(x)\, dx$

Claim $a_\mu(x)$ (Source on Boundary) $= A_\mu(x,z)|_{z=0}$ Gauge Field in Bulk

由于 $a_\mu \to a_\mu + \partial_\mu \Lambda(x)$ 下 Lagrangian 不变 [由 $\partial_\mu J^\mu = 0$]

于是 Dynamics of A_M shall still be invariant.

于是 $a_\mu \to a_\mu + \partial_\mu \Lambda(x)$ 是某 Subset of Gauge Transformation / Boundary 上 A 的剩余 Sym

$T^{\mu\nu}$

PF: $\int d^d x\, h_{\mu\nu}(x) T^{\mu\nu}(x)$ 加到 I 中. 这种操作等价于 Deform Boundary metric: $\eta_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$

Note: 这 $\mu\nu$ 的指标都是 Boundary 上操作的 ⟶

$|h| \ll 1$

于是 $\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ 可记作 Boundary 上 Metric

而 AdS Metric: $ds^2 = \frac{R^2}{z^2} + g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ 中有:

$$g_{\mu\nu}(z, x^\mu)\big|_{z\to 0} = \frac{R^2}{z^2} \eta_{\mu\nu}$$

现在:

$$g_{\mu\nu}(z, x^\mu)\big|_{z\to 0} = \frac{R^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})$$

于是 Stress Tensor 对偶于 Metric Perturbation

- 这里的 Statement 非常 General — For any correspondence.
- Cor:

  一个 field 理论若 Dual to higher-dim Theory, field theory 有 $T_{\mu\nu}$ 则 Higher Dim theory 有 Gravity

  [∵ Bulk 中的 $g_{\mu\nu}$ 由 $T_{\mu\nu}$ 的 Kinetic 项决定 Dynamics ⟶ 这就是 Gravity!

Lec 19:

	CFT		AdS
Recap: 1.	$\mathcal{O}$	$\longleftrightarrow$	Φ

对Z₂ GP相同 且 Quantum Number Match

· 目标: 求CFT中 $\mathcal{O}$ 的一个重要参数 Scaling Dimension —— Φ 的 mass (Gravity Side)

2. 在 $\mathcal{L}$ 中 引入 $\int \phi(x)\, \mathcal{O}\, d^d x$

该描述等价于 $\phi(x) = \Phi|_{\partial AdS}$

Mass Dimension Relation

Gravity side: $S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{d+1}x \sqrt{g}\,[R - 2\Lambda + \mathcal{L}_{matter}]$

↳ $2\kappa^2 = 16\pi G_{d+1}$

而 $\mathcal{L}_{matter} = -(\partial\Phi)^2 - m^2\Phi^2 + \dots$ (nonlinear term) $+$ (Maxwell $\mathcal{L}$)

· 现在考虑 Pure AdS 上 小 Φ 的扰动:

· 将 $\mathcal{L}$ 重归化: 令 $\begin{cases} \Phi \to \kappa\Phi \\ g_{MN} \to g_{MN} + \kappa h_{MN} \end{cases}$

· Recap: $\kappa^2 \sim G_N \sim \frac{1}{N^2}$

于是 $\kappa \sim O(\frac{1}{N})$ In unit of curvature

考虑 $\Phi, h_{MN} \sim O(1)$ 时 Perturbation 由 κ 控制. Naturally small.

而且意味着 Nonlinear (Higher order) $\frac{1}{\kappa^2}\Phi^3 \to \kappa\Phi^3$ Naturally Suppressed

仅用考虑 Leading Order 考虑 Free Theory

· 下面: Massive Scalar Field 的表现:

考虑 $\Phi \longleftrightarrow \mathcal{O}$ Correspondence.

$$S = -\frac{1}{2}\int d^{d+1}x \sqrt{g}\,[g^{MN}\partial_M\Phi\,\partial_N\Phi + m^2\Phi^2] + O(\kappa)$$

[由上不关于 κ 的分析]

↳ Pure AdS Metric

· 选定 $X^M = (z, x^\mu)$

EOM: $\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_M(\sqrt{g}\, g^{MN}\partial_N\Phi) - m^2\Phi = 0$

· Standard Laplacian eqn for massive scalar field in curved space-time

由 Translational Sym in x^μ 方向，可对这坐标作 Fourier Expand

$$\Phi(z,x^\mu) = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\, e^{ik\cdot x}\,\Phi(z,k)$$

↳ 描述 x^μ 方向的 F.T. 这里指代 Standard Mink Contraction.

Fourier Mode 下 EOM:

$$z^{d+1}\partial_z(z^{1-d}\partial_z\Phi) - k^2z^2\Phi - m^2R^2\Phi = 0$$

↳ $k^2 = -\omega^2 + \vec{k}^2$ ← Mink 中 time direction　　$k^\mu = (\omega, \vec{k})$

考虑 Φ 在 Boundary 上的行为 $(z \to 0)$:

· EOM: $z^2\partial_z^2\Phi + (1-d)z\partial_z\Phi - m^2R^2\Phi = 0$　(Leading order in z)

可见该 Partial Differential Eqn 是 Homogeneous 的 于是 可设 $\Phi \sim z^\Delta$

于是 $\Delta(\Delta-1) + (1-d)\Delta - m^2R^2 = 0$

$\Rightarrow \Delta = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2R^2}$ ($\equiv \nu$)

即 $\Delta = \frac{d}{2} \pm \nu$

记 $\Delta = \frac{d}{2} + \nu$

$\Delta_- = \frac{d}{2} - \nu = d - \Delta$

于是: $z \to 0$

$$\begin{cases} \Phi(k,z) \sim A(k)\,z^{d-\Delta} + B(k)\,z^{\Delta} + \cdots \\ \Phi(x,z) \sim A(x)\,z^{d-\Delta} + B(x)\,z^{\Delta} + \cdots \end{cases}$$

由于 $d-\Delta < \Delta$ ∴ $A \cdot z^{d-\Delta}$ Dominate ⟶ Leading Behavior

$B \cdot z^{\Delta}$ ⟶ Sub leading Behavior.

Physics Interpretation:

① ν 是 well defined 时 $m^2R^2 \geq -\frac{d^2}{4}$　[BF Bound]

rmk. AdS space 中 m^2 可小于0　　若 Violate 这条件则会导致 Instability.

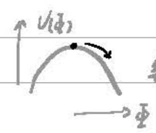
- Compare Mink Space:

$\partial^2\Phi - m^2\Phi^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \vec{k}^2 + m^2$.　i.e. $\Phi = e^{-i\omega t + i k\cdot x}$

若 $m^2 < 0$. 则 $|k|^2 < |m^2|$ 时, ω 是 Pure Imaginary

$\Phi \sim e^{|\omega| t} + e^{-|\omega| t}$

↳ Instability

换成势能分析: $m^2 < 0 \Rightarrow$  会从 Potential Top Slide down. 二者一致

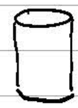
- AdS中:
  - ∵ $w^2 = m^2 + k^2$ ∴当 Const mode中 $k = \text{const}$ w 在负 m^2 时为 Pure Imaginary.

但是在 AdS中有 Space-time Curvature 于是没有 Translational Sym 则也是 $k \neq \text{const}$, Mode 一定有 Kinematics

于是 $k^2 > 0$ 则存在一定 Limit 允许 $m^2 < 0$ 存在 ——→ 此 w 为 real 即不会 Decay.

但 mass 不能 Too Negative

(2)

AdS 时空:  有 Boundary, 于是 Light Can Reach Boundary in finite time.

而这意味着存在 Energy Exchange on Boundary.

⇒ 要有个 Sensible Physical System 一 加入 B.C

↳ Energy wouldn't leak. If so, sys would be instable

—ʟ Stable-Sys 要求 Energy Wouldn't Dissipate.

Canonical Quantization:

用 Normalizable 的满足 B.C 的本征量进行 Φ 场展开.

Normalizability

易对曲面定义内积: $(\Phi_1, \Phi_2) = -i \int_{\Sigma_t} dz\, d\vec{x} \sqrt{-g}\, g^{tt} (\Phi_1^* \partial_t \Phi_2 - \Phi_2 \partial_t \Phi_1^*)$

Σ_t: Constant time slice.

- Claim: (Φ, Φ_2) indep of t. , $(\cdot, \cdot)$ 是 finite/infinite 对应 Normalizable or Non-Nor...
- Claim: 这个内积构建是以守恒 K-G 中概率流.
- Claim: Normalizable 与否取决于 Boundary 处趋势. 即 $z \to 0$ 时

  根据前: $\Phi \sim A z^{d-\Delta} + B z^{\Delta}$ 中 $z \to 0$ 时 $z^{\Delta} \to 0$ $(\Delta \geq 0)$

  于是 Φ 中 $A \cdot z^{d-\Delta}$ 部分有 Non-Normalizable 风险.

  $d-\Delta$ 中若 $\Delta \geq d$ 则一定不 Normalizable

于是 (有时参数化) $\begin{cases} \nu \geq 1 & \text{Non-Normalizable for certain} \\ 0 \leq \nu < 1 & \text{是 Normalizable 的.} \end{cases}$

Boundary Condition

B.C 可给出我们系统的能否条件:

① $\nu \geq 1$: $A=0$ [因为 A的解总是不 Normalizable的 于是要求 $A=0$]

[但是这会有同样的 Energy Conservation 问题]

② $0 \leq \nu < 1$: A 和 B 都可 Normalized 但为了满足 Energy Condition Claim 了在 2 种条件解决之

1. $A=0$ (Standard Quantization) — 几种满足 Energy Conserve 方案
2. $B=0$ (Alternative Quantization)
3. Mix ⋯

- ref: Nobil notes (谈论的) Breitenlohner - Freedman Bound
- 此时 Normalizable 指 Behavior specified by quantization. 与事实是否 Normalize 无关.

  e.g 在 $\nu < 1$ 时是 ② 就意味 A — Non Normalizable srds 也是 Normalizable 的

③ Build Up Hilbert Space through Normalizable Modes.

claim: ¹ 2个理论的等价性 ⟶ 2者的 Hilbert Space 相同.

² 所有的通道中的 Mode "Any thing FALL OFF in the standard quantization as things like z^{Δ} [选的某种 Quantization]" 都会 Mapp到 Bundy Theory 的 Hilbert Space 上某个 state

④ 关于 Non Normalizable mode: Not a part in Hilbert Space.

若遇到 Non-normalizable mode 应视其为 Background.

New modes will deform AdS 而这个 AdS 就是 non-normalizable 的.

Eg:

- $z \to 0$ Limit 下 Boundary Mode 之 Lagrangian 关系:
  - 选 Standard Quantization : $A=0$ ‖ 于是 Non-Normalizable mode 对应 $A \neq 0$
  - Every field 在 Boundary 上表现 等价于 Lagrangian 中 Source Term. $\int \phi(x)\, O\, d^4x \longleftrightarrow \phi(x) = \Phi|_{\partial AdS}$
  - $\Phi = A \cdot z^{d-\Delta} + B \cdot z^{\Delta}$ $\Delta = \frac{d}{2} + \nu$ ∴ $\nu > 0$ 时 在 $z \to 0$ 时 A - Part Dominate 于是取 A part 决定 Φ 的 Boundary Value

若 $A(x) = \phi(x)$ 时对应的场论，S_{bound} 应有 $\int d^dx\, \phi(x)\, O(x)$

rmk：$z^{d-\Delta}$ as kinematic factor ⟶ would be strip away [这个factor应该在ZOM]

- 所以 Non-Normalizable mode 并非 Hilbert Space 部分，而是在 determine boundary theory itself
- 注意若2个 solution differ by normalizable mode ⟶ 2 states in same theory

  Non normali··· ⟶ 2 states in two different theory

  [对应的 CFT 的 Lagrangian 都不同了]

- 现在更改一下 Field Operator Map 的说法：

$$\int d^dx\, \phi(x)\, O(x) \longleftrightarrow \phi(x) = \lim_{z\to 0} z^{\Delta-d}\, \Phi(z,x) \quad (*)$$

其中 $\Phi = A\cdot z^{d-\Delta} + B\cdot z^{\Delta}$

[目的是说 A relate to ϕ；这个 Statement 比之前 Conjecture 更具体；指定了 Boundary Value 是 Φ 展开的 A]

⑤：Eqn (*) 的解读：

Δ is the scaling dimension of O ⟹ 这可以看作某个和 ϕ 对偶的算符 O scaling dim 是 Δ

§ CFT 中定义 Scaling Dim 为：

$x^\mu \to x'^\mu = \lambda x^\mu$ 对应 Symmetric Coord Trans

对应 Operator：$O(x) \to O'(x') = \lambda^{-\Delta} O(x)$ 有这种变换性的叫 Scaling Operator [对应一种 Representation of Scaling Sym]

其：Δ: scaling dimension

- ：(*) 满足 Operator 以 dim Δ 的形式 Transform

PF：

1. boundary 的 scaling 诱导 bulk 的 scaling

$x^\mu \to x'^\mu = \lambda x^\mu \longleftrightarrow x^\mu \to x'^\mu = \lambda x^\mu$

Boundary $\qquad z \to z' = \lambda(z)$ Bulk.

$O(x) \longleftrightarrow \Phi(x) \qquad \phi = \Phi|_{\partial AdS}$

$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$

$O'(x') \longleftrightarrow \Phi'(x') \qquad \phi' = \Phi'|_{\partial AdS}$

2. 由 Symmetry 保证:

$$\int d^d x' \, \phi'(x') O'(x') = \int d^d x \, \phi(x) O(x)$$

由于 Φ 是 Scaler field ∴ $\Phi'(x', z') = \Phi(x, z)$

故 $\phi'(x') \equiv \lim_{z \to 0} (z')^{\Delta - d} \Phi'(x', z')$

则 $\phi'(x') = \lambda^{\Delta - d} \phi(x)$

代回 Lagrangian 得正确

可见 $O'(x') = \lambda^{-\Delta} O(x)$

Summary: Non Normalizable mode 在 (*) 式中表为 Correspond to an O and ϕ in the boundary theory

Scaler:

$\Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 R^2}$

- $m = 0$ $\quad \Delta = d$ (对应的 operator) $\quad$ Marginal
- $m^2 < 0$ $\quad \Delta < d$ $\quad$ Relevant
- $m^2 > 0$ $\quad \Delta > d$ $\quad$ Irrelevant

· 其中 Relevant/Irrel 代表了 IR 区域的行为

· Correspondence: $\int \phi(x) O(x)$ UV $\longleftrightarrow \phi(z) \cdot z^{d-\Delta}$

Does not change $\longleftrightarrow$ ∵ $\Delta = d$ ∴ 不随 $z \to \infty$ 变

~ 0 $\longleftrightarrow$ ∵ $\Delta < d$ ∴ $\phi(x) z^{d-\Delta} \to 0$

$\sim \infty$ $\longleftrightarrow$ ∵ $\Delta > d$ ∴ $\phi(x) z^{d}$

· 可见,在 z 十分 ~ 0 在 Gravity side 渐近性质 $\to 0$
与建立在以上这种 Correspondence 正好确切.

Summary:

- Bulk $\qquad$ Boundary

$\Phi \longleftrightarrow O$

Normalisable mode $\longleftrightarrow$ Different states

Non - Norm $\longleftrightarrow$ Different actions [Theories]

对 Standard Quantization 即 A-mode 是 non norm

$A(x)$ (Non-norm) $\longleftrightarrow \int A(x) O(x)$ — 描述 Deform of theory

mass $\longleftrightarrow \Delta$

$B(x)$ (Normalisable) $\longleftrightarrow \langle O \rangle$ of corresponding state

对 Alternative Quant:

$B \longleftrightarrow \int B(x) O(x)$

$A \longleftrightarrow \langle O \rangle$

$m \longleftrightarrow d-m$

• 考虑 Maxwell Field: **Vector Field**

$$A_m \longleftrightarrow J^m$$

在近 Boundary 的行为 $A_\mu \xrightarrow[z\to 0]{} a_\mu + b_\mu z^{d-2}$

Claim: Operator dual to A has dimension $\Delta = d-1$

rmk: 这里是 Conserve current 应有的 dimension

正因 $\Delta = d-1$ 与 Protect Conservation: J^0 — charge density [density] = $d-1$ [charge] = 0

• **Tensor Field:** $T_{\mu\nu}$

$$ds^2 = f(z)\, dz^2 + g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

若 $g_{\mu\nu} \xrightarrow{z\to 0} \frac{R^2}{z^2}(\eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}) \longleftrightarrow$ Field Part 加入 $\int h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$

Claim: $T_{\mu\nu}$ 的 dim: $\Delta = d$

Correlation Function in Euclidean Space

$$Z_{CFT}[\phi(x)] = \langle e^{\int d^d x\, \phi O} \rangle_E$$

$$\langle O \rangle = \frac{\partial}{\partial \phi} Z \Big|_{\phi=0}$$

• $\phi = 0$ 时回到 Partition function:

Partition Function of sys $\longleftarrow Z_{CFT} = \langle 1 \rangle_E \longrightarrow$ Euclidean Path Integral

• 若 Duality is True 则 Z_{CFT} 应等于 $Z_{Gravity}$ Partition function in Gravity.

即: 若 $O \longleftrightarrow \Phi$

$\phi \longleftrightarrow \Phi|_{\partial AdS}$

$$\Rightarrow Z_{CFT}[\phi] = \langle e^{\int \phi O} \rangle$$

$$\overset{\shortparallel}{Z_{grav}}[\Phi|_{\partial AdS}]$$ — Non-normalizable B.C

rmk: 人们不知道 Z_{grav} for QG

但知道 semi-classical limit 了 ($g_s \to 0$, $\alpha' \to 0$) $Z_{grav} = \int_{\Phi|_{\partial AdS} = \phi(x)} D\Phi\, e^{S_E[\Phi]}$, $S_E \propto \frac{1}{\kappa^2}$ ($\kappa^2 \to 0$)

- Leading Order: $Z_{grav} = \exp[S_E(\Phi_c)]$
  - ↳ Classical Solution

Lec 20

Review :

① 计算 Euclidean Correlation Function & Correspondence.

$$Z_{CFT}[\phi] = \langle e^{\int d^dx\, \phi(x) O(x)} \rangle_E$$ 这里的为 All Possible Sources 和 All Possible Operators

其实是把 Correspondence 在 I 中加入一项. 但这里写成 ⟨…⟩ 形式 理解为 Power Series of ϕ

Power series of ϕ with coefficient of Correlation function of O

② Correspondence $\phi \longleftrightarrow \Phi|_{\partial AdS}$ 我们期待 $Z_{CFT}[\phi] = Z_{bulk}[\Phi$ with $\Phi|_{\partial AdS} = \phi]$

$O \longleftrightarrow \Phi$

渐近条件: $\Phi(x,z) \xrightarrow{z\to 0} \phi(x) z^{d-\Delta}$

Δ 与 scalar, vector, tensor 有关

但 QG 不存在精确的 Partition Function

现在全都不知道. 我们仅在 Semi Classical Region 中可以计算

$\alpha' \to 0$
$G_N \to 0$

$l_s \to 0$

· 此时, $Z_{bulk} = \int D\Phi\, e^{S_E[\Phi]}$ ⟶ Standard Euclidean Action: $S_E = -\frac{1}{2\kappa^2}\int d^{d+1}x \sqrt{g}\,(R + L_{Matter})$

↳ Gravity Side 的所有 Field : Dilaton, Metric …

Rmk: ① At leading Order with $\alpha' \to 0$, $\kappa \to 0$ 可用鞍点近似 ⟹ $Z_{bulk} = \exp[S_E[\Phi_c]]$

Φ_c: Classical Solution with right B.C

· 而这种 limit 恰是 $N\to\infty$, $\lambda\to\infty$ in SYM

② 由于 $\frac{1}{2\kappa^2} \propto \frac{1}{G_N} \propto N^2$

而 Saddle Point Approx 有 要求 S_E 由 $\frac{1}{2\kappa^2}$ control, 而 $\frac{1}{\kappa^2} \propto N^2$ 可之前已 check 了

这种近似对应于 Large N 展开

于是 Saddle Point 近似可写成

$N\to\infty$, $\lambda\to\infty$ 的 Limit 下 $\log Z_{CFT}[\phi] = S_E[\Phi_c]$ with $\Phi_c(x,z) \xrightarrow{z\to 0} z^{a}\phi(x)$ ↓ Boundary Condition.

- 这里 $z^{0}\phi(x)$ 代表 non Normalizable part of Φ

- Δ:
  - Scalar $\quad \Delta = d-\Delta$
  - Vector $\quad \Delta = 0$ $\quad$ [Conserve Current dual to Vector field]
  - Tensor $\quad \Delta = 2$

$$A_\mu(z x) \xrightarrow{z\to 0} a_\mu + b_\mu z^{d-2}$$

$$h_{\mu\nu}(z x) \to \frac{1}{z^2}(g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu})$$

↳ Source for $T_{\mu\nu}$

Remarks:

① $Z_{CFT}[\phi]$ 中 ϕ 是 infinitesimal 的. : 由于我们 $\langle e^{\int\cdots}\rangle$ 被视为 Power Series of ϕ

这里我们仅使用 ϕ 的 Perturbation

Gravity 中: ϕ 对应于 Φ : Non normalizable mode ⟶ Non normalisable, 稍远 infinitesimal 的

可以使 Φ 不 disturb AdS space.

② 对于 $\log Z_{CFT}[\phi] = S_E[\Phi_c]$ Both side 都是 divergent 的.

↙ Usual divergence in QFT

↘ $ds^2 \propto \frac{R^2}{z^2}\cdots$ $z\to 0$ 时 Diverge

The Volume Divergence near boundary AdS

- IR/UV Divergence ⟶ 无穷大的 Volume ⟷ QFT Divergence

提需要 Renormalization —— 引入 Counter Term.

- Renormalization:

$$S_E^{(R)}[\Phi_c] = S_E[\Phi_c]\Big|_{z=\epsilon} + S_{CT}[\Phi_c(\epsilon)]$$

z=0, z=ε ← Regularization.

↳ Counter Term

23min. • 关于 S_{CT} 的选取:

- General n-pts function: Field Gravity

于是 $$\langle O_1(x_1)\cdots O_n(x_n)\rangle_c = \frac{\delta^n \log Z_{CFT}^{(d)}}{\delta\phi_1(x_1)\cdots\delta\phi_n(x_n)}\Big|_{\phi=0} = \frac{\delta^n S_E^{(d)}[\Phi_c]}{\delta\phi_1(x_1)\cdots\delta\phi_n(x_n)}\Big|_{\phi=0}$$

↳ connected

计算给定 B.C 的 $S_E[\Phi]$ 即可用之得到关联函数.

- 1-pt function:

$$\langle O(x)\rangle_\phi = \frac{\delta S_E^{(d)}[\Phi_c]}{\delta\phi(x)} = \lim_{z\to 0} z^{d-\Delta}\frac{\delta S_E^{(d)}[\Phi_c]}{\delta\Phi_c}$$

for Scalar

而 $\frac{\delta S_E}{\delta\Phi_c(z,x)} = \Pi_c(z,x)$ 即是 Φ_c 的 z 向动量, 这里的 z 被视作 time.

36min

- 故 $$\langle O\rangle_\phi = \lim_{z\to 0} z^{d-\Delta}\,\Pi_c^{(R)}(z,x)$$

而 $\Phi(x,z) \xrightarrow{z\to 0} A(x)\,z^{d-\Delta} + B(x)\,z^{\Delta}$ 且将 $A(x) \overset{replace}{\longleftrightarrow} \phi(x)$

则 $\langle O(x)\rangle = 2\nu\cdot B(x)$, ($\Delta = \frac{d}{2}+\nu$. $\nu = \sqrt{\frac{d^2}{4}+m^2R^2}$ [了证]

rmk. 于是 Φ 中一部分是 O 的 Source 另一部分描述 $\langle O\rangle$

40-42

Example: 2 Point Function

○ Aside: 选择 Euclidean Path Integral: 在 Lorentz signature 下未定义 time ordering, 不一定可以很好 match to path integral. 但是一般的 Order 不同, Path Integral 表出 除了 Time Ordered. Z_g: retarded green function

考虑 Scalar Operator: 由于考虑 2-pt function, 所以 仅考虑 S_E 中的 quadratic level,

$$S_E = -\frac{1}{2}\int d^{d+1}x\sqrt{g}\,\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi\,\partial_\nu\Phi + m^2\Phi^2\right)$$ (Claim, 不用考虑 higher order corrections)

注: 对 Euclidean Signature $dx^2 = \delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, $ds^2 = \frac{R^2}{z^2}(dz^2+dx^2)$

现在考虑找到 $S_E^{(d)}[\Phi_c]$ 即可代入求得 2-pt function

$$\Pi = -\sqrt{g}\, g^{zz}\partial_z \Phi$$

EOM: $-\partial_m(\sqrt{g}\, g^{mn}\partial_n\Phi) + m^2\Phi = 0$

FT: $\Phi(x,z) \sim \Phi(k,z)\cdot e^{ik\cdot x}$

$\because g_{\mu\nu} = \frac{R^2}{z^2}(dz^2 + dx^2)$ 代入得

* $z^{d+1}\partial_z(z^{1-d}\partial_z\Phi) - k^2z^2\Phi - m^2R^2\Phi = 0$

可用 Bessel Eqn 解. 但这稍后再说.

· 将 Classical Solution 代入

$$S_E[\Phi_c] = -\frac{1}{2}\int d^{d+1}x\ \Phi_c\left[m^2\Phi_c - \partial_m(\sqrt{g}\,g^{mn}\partial_n\Phi_c)\right] - \frac{1}{2}\int_0^\infty dz\, d^dx\, \partial_m\left[\sqrt{g}\,g^{mn}\partial_n\Phi_c\,\Phi_c\right]$$

Bulk EOM: 0 Boundary 项是 Spatial Boundary

53:16

$$= -\frac{1}{2}\int d^dx\, g^{zz}\partial_z\Phi_c\,\Phi_c\Big|_{z=0}^{\infty}$$

换个写法: $= -\frac{1}{2}\int d^dx\, \Pi_c\,\Phi_c\Big|_{z=0}^{z=\infty}$

FT: $= \frac{1}{2}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,\Phi_c(k,z)\Pi_c(-k,z)\Big|_0^\infty$

探究 Divergence

$z \to \infty$

Claim: $\Pi_c\Phi_c\big|_{z=\infty} = 0$

PF: 而我们让 Φ_c 是一个 Reasonable Solution 则 $\Phi_c\big|_{z\to\infty}$ 和 $\partial_z\Phi\big|_z$ 都 finite

$\sqrt{g}\,g^{zz}\partial_z\Phi \sim \Pi_c \sim z^{1-d}\partial_z\Phi_c$

于是 当 $d>1$ 且 $\partial_z\Phi$ finite 则 $\Pi_c \xrightarrow{z\to\infty} 0$ QED

$z \to 0$

$\Phi_c \longrightarrow A(x)\, z^{d-\Delta} + B(x)\, z^{\Delta} + \cdots$ B.C

$\Pi_c \propto -A(d-\Delta)z^{-\Delta} - \Delta B z^{\Delta-d} + \cdots$

即 $\Pi_c\big|_{z\to0}$ 一般发散

而 $\Phi_c\Pi_c \propto z^{d-2\Delta} + \cdots$ 由于 $\Delta > \frac{d}{2}$ (for $\nu>0$) 则 这个 Term 发散.

· 于是 $S_E[\Phi_c]$ always divergent.

3lx Counter Team

Lec 21 :

Recap: AdS中的 scalar field Φ, mass : m

Go to boundary : $z \to 0$, $\Phi(x,z) \to A(x) z^{d-\Delta} + B(x) z^{\Delta} + \cdots$

$\Delta = \frac{d}{2} + \nu$, $\nu = \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 R^2}$

Φ dual to Boundary上的 scalar operator

$\Delta \longleftrightarrow$ scaling dimension of $\mathcal{O}$

$A(x) \longleftrightarrow \phi(x)$ [Source of $\mathcal{O}$]

$2\nu B(x) \longleftrightarrow \langle \mathcal{O}(x) \rangle$ - Claim: 对 higher order of Φ, 此关系 remain true

在 2 point 的 example 中: $B(x) \propto A(x)$

- $\langle \mathcal{O}(x) \rangle$ ϕ 于是有 $\langle \mathcal{O}(x) \rangle = 0$ with $\phi = 0$
  $\updownarrow$ $\updownarrow$
  $B(x) \propto A(x)$ [if ϕ is zero, $\mathcal{O}(x)$ don't have VEV]

- $\phi \neq 0$ 时, 可将 $\langle \mathcal{O}(x) \rangle_\phi$ 按 ϕ 展开:
  $\langle \mathcal{O}(x) \rangle \sim \phi(x) + \phi^2 + \cdots$
  Linear level,

$\langle \mathcal{O}(x) \rangle_\phi \sim \phi(x) \Rightarrow \langle \mathcal{O}(x) \rangle = G_E(x) \phi(x)$

2pt function

PF:

关于 $G_E(\,)$:

$G_E(x) \equiv \langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(0) \rangle$

FT

$$G_E(k) = \left. \frac{\delta^2 \log Z}{\delta\phi(k)\, \delta\phi(-k)} \right|_{\phi=0}$$

而 $\frac{\delta \log Z}{\delta \phi(k)} = \langle \mathcal{O}(k) \rangle_\phi$

于是 $G_E(k) = \frac{\delta \langle \mathcal{O}(k) \rangle_\phi}{\delta \phi(k)}$ 由 one pt function 生成 2pt function.

at linear order: $\frac{\langle \mathcal{O}(k) \rangle}{\phi(k)}$ 故而有 $\langle \mathcal{O}(k) \rangle_\phi = G_E(k) \phi(k)$

而 $\frac{\langle \mathcal{O}(k) \rangle_\phi}{\phi(k)} = \frac{2\nu B(k)}{A(k)}$

- 关于计算 $A(x)$, $B(x)$:
  ① EOM : 给到相应 restriction
  ② B.C : $\lim_{z\to 0} \Phi(x,z) \to A(x) z^{d-\Delta} + B(x) z^{\Delta} + \cdots$ 这里 A 即 ϕ 即 Boundary 的 ϕ
  ③ 在 Bulk 中 要求 regular 的, 对 $A(x)$ $B(x)$ 加更多 restriction

Higher Point Functions:

$\log Z_{CFT}[\phi] = S_E[\Phi|_{bdy} = \phi]$

↳ • Solve EOM for Φ to Non Linear Order 可可得 Higher Pt function

• 将 S_E 用 ϕ 展开，展开系数即 Correlation function.

e.g.: $S = -\int d^{d+1}x \sqrt{g} \left[\frac{1}{2}(\partial\Phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\Phi^2 + \frac{\lambda}{3}\Phi^3 \right]$

rmk 本应在 S 前面有 $\frac{1}{2\kappa^2}$，但它可以吸收掉。可通过 $\Phi \sim \kappa\Phi$

从而导出 λ 也带上 κ：$\lambda \sim \kappa \sim O(\frac{1}{N})$

EOM: $\Box\Phi - m^2\Phi - \lambda\Phi^2 = 0$

BC: $\lim_{z\to 0} z^{\Delta-d}\Phi(x,z) = \phi(x)$

由于 $\lambda \sim 1/N$ ∴可以微扰展开 λ　Claim 微扰展开同时也是展开的是 ϕ

$\therefore \Phi_c = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots$

$\quad\ \propto\phi \quad \propto\phi^2$

于是 $S[\Phi_c] = S_2[\phi] + S_3[\phi] + \cdots$　(linear order given to EOM)

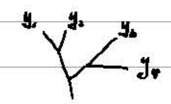
rmk: ① S_2 代表 $*\cdot\phi^2$　$*$ 是 2pt function，同理 $S_3[\phi]$ 的系数是 3pt function

② 这个事实 straight forward 但 tedious. 与 flat space 关联函数计算一致　可通过 Feynman Diagram

Recall QFT:

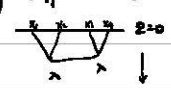
关于 含 ϕ^3，计算 $\langle\Phi(y_1)\cdots\Phi(y_n)\rangle$　(所有空间都是时空间)

e.g.:



flat space time

Major difference: source $\phi(x)$ be on the boundary



AdS Space Time

不同于 flat space 地方：　flat space 仅有 bulk—bulk 传播子，这里有 bulk—boundary 传播子 还有 bulk-bulk

• Bulk – Bulk:　$G(z,x;z',x')$

$$(\Box - m^2)G(\cdots) = \frac{1}{\sqrt{g}}\delta(z-z')\delta^{(d)}(x-x')$$

rmk: $G(\cdots)$ 应是 normalisable in either z or z'　$\Rightarrow G(z,x;z',x') \sim z'^{\Delta}$ $(z'\to 0)$

而且这个条件还应是 regular 的 当 $z, z' \to \infty$

- **Boundary-Bulk Propagator:**

$K(z,x;x')$ ，满足 $(\Box-m^2)K(z,x;x')=0$ ← ① rmk: 这里的 O 是因为没有 Bulk Source. 上面是δ函数是因为 bulk Source 在这 30 -37

↳ Boundary point 是 z=0 于是不会为零.

为了满足 Normalizable Condition. 要求 $K(z,x;x') \xrightarrow{z\to 0} z^{d-\Delta}\delta^{(d)}(x-x')$

则 $\Phi(x,z)=\int d^dx'\, K(z,x;x')\phi(x')$ 会有我们要求的 B.C. $\Phi(x,z)\xrightarrow{z\to 0} z^{d-\Delta}\phi(x)$

rmk: 这个 Boundary - Bulk Propagator, 在 Boundary 没有 Source. 在 Bulk 中有 Source.

Summary: $\langle O(x_1)\cdots O(x_n)\rangle=\langle\Phi(x_1)\cdots\Phi(x_n)\rangle_{AdS}$ $x_1\cdots x_n$ 在 Boundary 上.

于是仅用算 Gravity side 的 Correlation function，但将 field 取值在 Boundary 上.

然后还需要这种 Propagator : $\begin{cases}\text{Bulk — Bulk}\\ \text{Bulk — Boundary}\end{cases}$

Rmk:

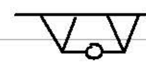
① 仅用 Action 的展开项 [illegible] $S=S_0+S_3+\cdots$ 给出的 Correlation func 是 Tree level 的.

$$Z_{CFT}[\phi]=Z_{gravity}[\Phi]=\int D\Phi\, e^{S_E[\Phi]}=e^{S_E[\Phi_c]}\cdot\int D\chi\, e^{S[\Phi_c+\chi]-S_E[\Phi_c]}$$

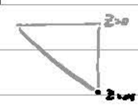
由于 Φ_c 代表了 classic eom. 所以 $S_E[\Phi_c+\chi]$ start with quadratic order. ↳ Fluctuation around Φ_c

$S_E[\Phi_c]$ ~ Tree level diagram

考虑 χ 后 ~ 考虑到了 Quantum Fluctuation. of Loops.



P.S Witten Diagram:

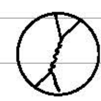


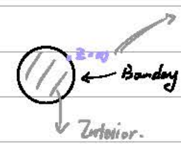
Claim: z=∞ 时可视作一个点.

整个时空可画成一个 Disc

中间 z=0 的 boundary 是 R^d 加入一个点后 ~ D^d.

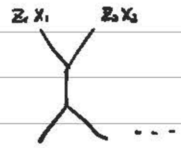
于是 Witten diagram 如下





② 对应于直接在 QFT 中关联函数在 AdS 中的 <...>

$$\langle\Phi(z_1,x_1)\,\Phi(z_2,x_2)\cdots\Phi(z_n,x_n)\rangle_{AdS}$$



多个⟨…⟩可用树图 Feynman Diagram 表示.

现在在 AdS 中都是相同形式.

rmk: 都是 Bulk to Bulk 传播子

当我们将 $z \to 0$ 时 所得到的⟨…⟩

即 $\langle \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n) \rangle_{AdS} \propto \lim_{z_i \to 0} \langle \Phi(x_1, z_1) \cdots \Phi(x_n, z_n) \rangle_{AdS}$

claim: $K(z, x; x')$ and $\lim_{z \to 0} G(x z; x', z')$ 和上面关系一致.

这里缩放 factor 将用于联系 Bulk Correlation func 和 Boundary Correlation func 之间.

rmk: 这里表明有两种不同方式计算 CFT side 的关联函数 ① 直接算 Boundary 的 更算

② 算 AdS 中的 更算, 然后将 $z \to 0$

- 关于 AdS CFT 算 Wilson Loop.

In a gauge theory: $W_r[C] = \mathrm{Tr}\, P \exp\left[i \int_C A_\mu dx^\mu \right]$

Path Ordering: 由于不同位置 A_μ 不 · 之 Commute 所以要这个 Ordering

↳ Close Path.

Gauge Field $A_\mu^a T_r^a$ ↓ Generator of Gauge Gp in some rep: r. 一般选 Fundamental rep

- Wilson Loop 的物理意义:

  Phase factor associated with transporting an external particle in a r-rep along C

  类似 AB 效应 Gauge field version.

  - 对应 Observable: $\langle 0 | W(C) | 0 \rangle \leftrightarrow \langle \psi | W(C_1) \cdots W(C_n) | \psi \rangle$
  - 关于 external: 一般指 Particle 有 infinite mass ⟶ Infinite heavy. 这样可以 localize the path, (不确定性关系)

- 若 r 是 fundamental rep 则对应于 quark. 即这个 phase factor 代表 transport a quark.

- 常见 Loop:  $T \gg L$ 即 ‖ 可以看作 Particle 和 anti Particle 一起 Moving forward in time.

这里 $\langle W(C) \rangle \sim e^{-iET}$ E: Potential energy between quark 和 anti-quark adjoint rep と funda rep?

- How to calculate $\langle W(C)\rangle$ in $\mathcal{N}=4$ SYM using gravity

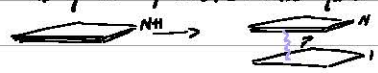
  在计算前需先知道如何 introduce fundamental external quark in $\mathcal{N}=4$ SYM

  Claim: 所有 $\mathcal{N}=4$ SYM 的 field rep 都是 adjoint rep 而非 fundamental rep

  ② Gravity description of such an external particle

引用 N+1 个 D_3 brane 描述 $\mathcal{N}=4$ SYM

① 看 Separation of brane 产生 massive quark.



Sym: • $SU(N+1) \to SU(N)\times U(1)$

String: 由于 ... 两端有 $SU(N)$ Sym. U(1) 无 com

所以 String transform in fundamental rep of $SU(N)$

• 从 $SU(N)$ Gauge theory 看 ... 理解为 Quark.

$M = \frac{|\vec{r}|}{2\pi\alpha'}$

② 看 low-E limit: $\alpha' \to 0$

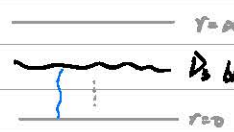
若我们想 keep this quark

∴ 还需让 $r \to 0$ 让 $\frac{|\vec{r}|}{\alpha'}$ remain finite.

Claim. 在这个 'maldecena limit' 下 remain $N=4$ SYM

Gravity side 上述过程描述:

Near horizon limit 下: Claim: $r=0$ 处 N D_3-brane disappear. [infinite proper distance away]



• 若一个 D_3 brane 与 ... $AdS_5\times S^5$ 中 ... 有一个 ... 的 D_3 brane [在 $\frac{|\vec{r}|}{\alpha'}$ finite 下 可以 check the claim]

考虑 两端 ... 了一根 open string ~ :

Claim. $M = \frac{r}{2\pi\alpha'}$ also in AdS

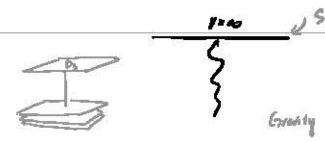
这是个 consistency check: 可不同 ... 看 mass 是 相同.

... M 是 ... obs ...

• 引入 External Particle, 即引入 infinite massive particle, 即将 D_3 brane 放在 $r=\infty$

Summary: external quark with $M=\infty$ in $N=4$ SYM $\equiv$ a string ending on the boundary of AdS

and location of quark = end pt of string



即 在 $N=4$ SYM 中引入 external quark = 引入 一根 open string.

Lec 22

一般文献 quark 的一圈的 wilson loop: Standard wilson loop $\mathrm{Tr}\, P\{\exp[i\int_C ds\, A_\mu \frac{dx^\mu}{ds}]\}$

D_3 brane

$\langle\phi\rangle$ 代表 D_3 brane 的距离. 为了描述 String 对 D brane 的 Stretch, 作用量让 String 与 φ couple.

Sym breaking: $SU(N+1) \longrightarrow SU(N) \times U(1)$

$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

引入 String 的 rep φ 可由 off diagonal part 表示.

Coupling: $W(C) = \mathrm{Tr}\, P \exp[i\int ds\,(A_\mu \frac{dx^\mu}{ds} + \vec{n}\cdot\Phi\sqrt{\dot{x}^2})]$

$\dot{x}$ 即 $\frac{dx^\mu}{ds}$ 的模

$\vec{n}$ 代表 String location: S^5 上位置用 $\vec{n}$ 表示

Φ: 6 scalar field of $N=4$ SYM

这个 $W(C)$ 是考虑 string dynamics 后的 $W(C)$, 不同于仅有一个 massive particle 的 $W(C)$

- 考虑 such a loop traverse some loop C on boundary

  facts: ① quarks lie at the endpt of a string in AdS. C must be the boundary of Corresponding worldsheet (记为 Σ)

  $C = \partial\Sigma$

  ② $\langle W(C)\rangle$ 给出 Quark system 的 partition function

with the duality → Z_{pert} $\langle W(C)\rangle = Z_{\text{string}}[\partial\Sigma = C]$

这说明 String 的 World sheet 边界是 C 也就是说 endpoint 是 quark 所在.

$X^\mu(\sigma^a)$: World sheet 的坐标 描述 AdS 中弯了的 worldsheet

$Z_{\text{string}} = \int_{\partial\Sigma = C} DX^\mu\, e^{iS_{\text{string}}}$

↳ 在 Σ 上积分, 但 Σ 的边 C 是 $\partial\Sigma = C$

S_{string} 是适当的 Action eg NG: $\frac{1}{2\pi\alpha'}\sqrt{-\det h}$, h 是 W.S 上的 induced metric.

现在等式左右都需要且仅表示了. 可以 check 是否相等 $\langle W(C)\rangle = Z_{string}$

由于 求解 Z_{string} 难算 所以 考虑 $\begin{cases} g_s \to 0 \\ \alpha' \to 0 \end{cases}$

$g_s \to 0$: 可以忽略开弦 不同 topology. 只考虑最低阶的. ⟶ neglect splitting & joining of string.

$\alpha' \to 0$: $\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{\cdots}$ 可见 α' 代表 Coupling Const on world sheet. α' 也可以作 effective $\hbar$

当 $\alpha' \to 0$ 时 可以用鞍点近似

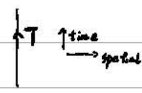
即 evaluate classical action ⟶ 忽略 world sheet 上的 fluctuation

于是 $g_s \to 0$, $\alpha' \to 0$ 时 $\langle W(C)\rangle = \exp\left[i S_{classic}[\partial\Sigma = C] \right]$

↳ Action evaluated at classical solution

- Example:

① Static quark:



T: total length.

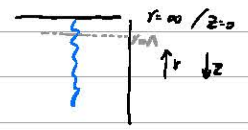
Field Theory

$\langle W(C)\rangle = e^{-iMT}$ ∵ static, $E \simeq M$ field theory side. A claim.

Gravity

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{R^2}{r^2}dr^2$$

$$= \frac{R^2}{z^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2) \qquad z = R^2/r$$



—: Static String, all the way to the interior. [由于忽略 $AdS_5 \times S^5$ 的

* 由于 S_{NG} 有 reparametrization 的对称性 于是可以任意选 τ σ

我们选 $\tau = t$ (real spacetime 的 time, $\sigma = r$)

于是 Static String 可 $\underline{X}^i(t, r) = $ Const.

○ 现在求上述 Solution 对应的 Action.

$$dS_{ws}^2 = h_{\alpha\beta}\, d\sigma^\alpha d\sigma^\beta$$

$$= \frac{r^2}{R^2}(-dt^2 + d\vec{X}^2) + \frac{R^2}{r^2}dr^2 \xrightarrow{\text{对应到 WS 上}} = \frac{\sigma^2}{R^2}(-d\tau^2) + \frac{R^2}{\sigma^2}d\sigma^2$$

↳ 这里的 X 指 space-time 中的 X, $\underline{X}$ 指 WS 上的

于是结出了在上述 Gauge下 Spacetime metric

而通过注意到 (AdS) 对称 String有 time translation sym.

于是 $\det h = -1$, $S_{NG} \to -\frac{1}{2\pi\alpha'}\int dt \int_0^{\Lambda} dr$ (由于 $\int_0^{\infty} dr$ 发散 ∴正规化引入一个 Λ

与 $W(C)$ 对比 → $M = \frac{\Lambda}{2\pi\alpha'}$ (即之前 claim的 Mass = radial location / $2\pi\alpha'$

换成 z 的写法: $\epsilon = \frac{R^2}{\Lambda}$ 作为 z 的 short distance cut off

$M = \frac{R^2}{2\pi\alpha' \epsilon}$ → 可理解为 quark 被拉开 ϵ 距离所得到的 M

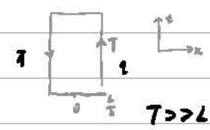
$= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\frac{1}{\epsilon}$ → 正是 strong coupling prediction

$R^4/\alpha'^2 = \lambda = g_{YM}^2 N$
$G_5/R^3 = \frac{\pi}{2N^2}$

Tool box

example 2:

Static potential between a quark and anti-quark

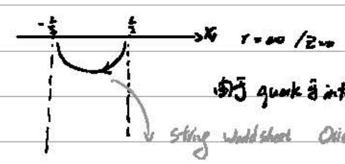


$T >> L$ → 有纵向 translational invariance $\xrightarrow{\text{Claim}}$ $\langle W(C)\rangle = e^{-iE_{tot}T}$

$E_{tot} = 2M + V(L)$ mass of quark + Potential Energy

↓

在λ,N→∞下 可用 Gravity 计算



由于 quark 有 interact 所以会 deform string world sheet.

从物理上, 2 quark 的 interaction 试图把 2 个 world sheet 连起来

用 z coord 描述

$\tau = t$, $\sigma = x_1$, 而弯曲的 worldsheet parametrized by $z = z(\sigma)$

还有 $z(-\frac{L}{2}) = z(\frac{L}{2}) = 0$

$\sigma: (-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$

决定弯曲曲面

由于有 time translation sym 所以 Z 不能依赖 t.

$X^{i+1}(\tau,\sigma) = const$ [由于 Static straight string]

考虑嵌入度规:

$$dS_{ws}^2 = \frac{R^2}{z^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2)$$

$\downarrow d\tau^2 \quad \downarrow d\sigma^2 \quad \downarrow z'^2 d\sigma^2$

$$= \frac{R^2}{z^2}(-d\tau^2 + (1+z'^2)d\sigma^2)$$

$$S_{NG} = -\frac{R^2}{2\pi\alpha'}\int dt \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} d\sigma \frac{1}{z^2}\sqrt{1+z'^2}$$

$$= T \cdot \frac{-R^2}{2\pi\alpha'}\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{z^2}\sqrt{1+z'^2}$$

现在要 extremize w.r.t. $z(\sigma)$ solve for $z(\sigma)$ 得到 S_{cl}

Recap 我们前面 有用的关系: $\langle W(C)\rangle = Z_{string}[\partial\Sigma = C]$ 得到强耦合中难算的东西.

即 $\langle W(C)\rangle = \exp[i S_{classic}[\partial\Sigma = C]]$ 而 Static case 下 $\langle W(C)\rangle = e^{-iE_{tot}T}$

这里 $E_{tot} = 2M + V(L)$

∴运用 Holography 而理解到 $V(L)$ 直观上 $V(L)$ 代表 quark, 可 attractive ∴ 应是负的, 有限的.

于是我们有 $S_{NG} = -iE_{tot}T$

$$V(L) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\int_0^{\frac{L}{2}} d\sigma\left(\frac{1}{z^2}\sqrt{1+z'^2} - \frac{1}{\epsilon}\right) \qquad M = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\frac{1}{\epsilon}$$

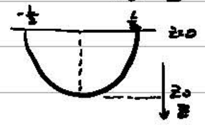
计算:

① 对 $\frac{1}{z^2}\sqrt{1+z'^2}$ 分析: 用分析力学方法, 这部分记作 $\mathcal{L}$

注意 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \sigma} = 0 \longrightarrow E$ conserve

而 $H = z'\Pi_z - \mathcal{L} = const$

$\Rightarrow \frac{1}{z^2}\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} = const$



由对称性知 $z'|_{x_1=0} = 0$

∴ $const = \frac{1}{z_0^2}$

$$\begin{cases} z'^2 = \frac{z_0^4 - z^4}{z^4} \\ z(\pm\frac{L}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_0 = L\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})}$$

代回. $V(L) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\int_{\epsilon}^{z_0}\frac{dz}{z'}\frac{1}{z^2}\sqrt{1+z'^2} - \frac{1}{\epsilon}$

记 $z \equiv z_0 y$

$$V(L) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi z_0}\left[\int_{\epsilon/z_0}^{1} dy\, \frac{1}{y^2}\frac{1}{\sqrt{1-y^4}} - \int_{\epsilon/z_0}^{1}\frac{dy}{y^2} - \int_{1}^{\infty}\frac{dy}{y^2}\right]$$

$\int^1 \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{y^2} - \cdots \int_1^\infty$

$\epsilon\to 0 \quad = -\frac{\sqrt{\lambda}}{L}\left(\frac{4\pi^2}{\Gamma^4(\frac{1}{4})}\right)$ finite + negative ✓

RmK:

1. 关于 $\frac{1}{L}$ 的分析: 这个[illegible] Coulomb potential

claim: $\mathcal{N}=4$ Sym 是 scaling theory, Potential 正比 $\propto \frac{1}{L}$

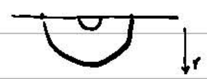
2. $V \propto \sqrt{\lambda}$ 意味 strong Coupling. 相应的 weak coupling $\propto -\frac{\lambda}{L}$

λ 类比 fine structure const, 代表一种[illegible] Coupling.

$\lambda\ll 1$ 的时候 $\propto \lambda$; λ 很大 $\propto \sqrt{\lambda}$

3. z_0 含义: $z_0 \propto L$

z_0 代表深入 bulk 的距离



$L\to\infty$, $z_0\to\infty$ all the way to AdS

z_0 的 behavior 反映 IR/UV : L 很大 — deep down AdS   L小: Boundary.

Finite Temperature

String in $AdS_5\times S^5$ $\mathcal{N}=4$ SYM

normalisable modes $\longleftrightarrow$ states

pure AdS_5 $\longleftrightarrow$ vacuum

- 其中一个 Obvious state : finite temperature state

- Thermal State:

  考虑 Gravity side 对其描述

  ① Asymptotic AdS_5 对应于 thermal state 即 Gravity side 仅有 normalizable modes

  ② Gravity 应该有 finite T 即 satisfy all laws of thermal dynamic

  ③ Symmetry 应该对应. [Boost Sym broken 了, 但 translational 还有 rotational 应 preserve]

有2个 Candidate 强耦合表示
① Thermal Gas in AdS
② Black Hole.

先考虑 thermal gas description

场论描述　　① go to Euclidean signature (Euclidean time)

$t_E \sim t_E + \beta$ for Bosons — Periodic

for Fermions — Anti Periodic

* : 一般情况. "When compact space go to 0 sizes, there's a danger having curvature singularity"

于是 我们使用 Periodic time 后 time dimension是 compact的. 当 $z \to \infty$ 时 变为 Zero Size

t un compact, $z \to \infty$ 是 Coord. singularity; t compact — space-time singularity

于是 thermal field 对应的 space-time 结构 ① $z = \infty$ 时有 singularity

② Claim: strings winding around t_E 有 tachyon problem.

现看 Blackhole 描述:　　• CFT on $\mathbb{R}^{d-1}$ ⟺ BH with planar horizon. (Horizon & Boundary Same Topo)

BH Horizon : topology 应是 $\mathbb{R}^{d-1}$ 而非 sphere 才能保证 translational Sym

$\frac{R^2}{z^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2)$ implies.

Ansatz:

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}\left(-f(z)\,dt^2 + d\vec{x}^2 + \frac{R^2}{z^2}\,g(z)\,dz^2\right)$$

保留了 $\vec{x}$ 方向 translation Rotation Sym ; 未知函数: $f(z)$, $g(z)$ | 若在 $d\vec{x}^2$ 前加 $h(z)$ 可吸收于重定义 z

由 Einstein Eq. 解得 $f = \frac{1}{g} = 1 - \frac{z^d}{z_0^d}$　　Horizon: $z = z_0$

于是 Horizon 确是 $\mathbb{R}^{d-1}$

而 $z \to z_0$ 时 有 z^d fall off , claim 这是 Normalizable 的.

高 Sym. 该 dual to thermal 态

现在 Going to Euclidean Signature 并加入 Periodicity 并且 require metric 在 Horizon 处是 regular 的.

Lec5：计算T

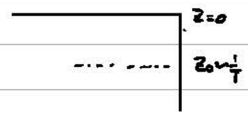
· 用z_0描述 temperature：

○ 详见 Lec 5： $\beta = \frac{1}{T} = \frac{4\pi}{d} z_0$

k 是无穷远处时间的周期 β

· 书我们讨论 temperature 我们还需要一个 time unit.

· 这里的 temperature 是 Boundary temp ，Bulk 的 temperature 依赖于 z



rmk: $z_0 \sim \frac{1}{T}$ 反应 IR/UV connection

High temp ⟶ Horizon go to boundary

不同的T 可以探索 gravity side 不同 region

由 BH Solution 可以得到 BH thermodynamics. 我们还希望 BH 的 S, F 与 Field theory 的 S F identify

entropy FreeEnergy

于是可 obtain thermodynamic quantities at strong coupling in $\mathcal{N}=4$ SYM using BH

· $S_{BH} = \frac{A}{4G_5}$ ← dim reduction on S^5 $A = \int dx_1 dx_2 dx_3 \frac{R^3}{z_0^3}$ (infinite Area, 但定义 entropy density 有限.

$\therefore \rho_s = \frac{R^3}{z_0^3} \frac{1}{4G_5} = \frac{\pi^2}{2} N^2 T^3$

由 Holography toolkit 给出 $\frac{G_5}{R^3} = \frac{\pi}{2N^2}$ 以及 $\beta = \frac{4\pi}{d} z_0$

rmk: L 维数分析 由于 $[S]=0$ $\therefore [\rho_s] = [L]^{-3} = M^3 \sim T^3$

· Energy density, Pressure: $\langle T_{\mu\nu} \rangle$

讨论是基于 $\lambda \to \infty$ strong coupling

· 由于 $T_{\mu\nu} \sim h_{\mu\nu}$ $\therefore$ $T_{\mu\nu}$ 的 Bulk 行为可能是 $h_{\mu\nu}$ 的变化 有 $1-\frac{z^d}{z_0^d}$ ($\lambda \to \infty$)

而 Normalizable mode 是 z^d, 系数是 $\frac{1}{z_0^d}$ B mode? d? Δ? 最后 $\langle T_{\mu\nu} \rangle \propto \frac{1}{z_0^4} \sim T^4$

dim analysis case 是差 1:41

· Perfect fluid:

$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \Rightarrow \begin{cases} F = -\frac{\pi^2}{8} N^2 T^4 \\ E = F + TS = \frac{3\pi^2}{8} N^2 T^4 \end{cases}$ ($\lambda \to \infty$)

· 考虑 Free Theory: ($\lambda = 0$)

$S_{\lambda=0} = (8 + 8 \cdot \frac{7}{8}) \frac{2\pi^2}{45} T^3 (N^2-1) = \frac{2}{3} \pi^2 N^2 T^3$

(rmk: 一个 bosonic dof 贡献 $\frac{2\pi^2}{45} T^3$) ($\mathcal{N}=4$ SYM. 8 boson 8个 fermion. 每个 fermion 贡献 $\frac{7}{8}$ 的 bose dof

得 $\frac{S_{\lambda=\infty}}{S_{\lambda=0}} = \frac{3}{4}$

Lec 23

- 常用AdS/CFT 将 field 放在 sphere上 　将 dual to Global AdS

现在考虑 在 finite temp 时 把 CFT 放在 sphere上

CFT on $\mathbb{R}^{d-1}$: CFT 没有 scale, $\mathbb{R}^{d-1}$ 也没有 scale. 但是在 finite temp 下 有了 scale

only scale : T

- 于是这个 scale provide energy unit.

Cor: ※ flat space + finite temp : Physics in CFT at all temperature are same

仅是相差 scaling of unit 而已. 将 unit 重定义一下, 大家都等价

但将 CFT 放在 sphere上 　S^{d-1} 　(size = R)

Finite temp 下 physics be controlled by Para of R, T

由于这个时候有 2 个参数, R fixed 时候有了 relative scale.

于是 Physics much richer

Features: physics on the sphere.

1. Thermal Gas in AdS Now Is Allowed

PF:

- Global AdS soln:

$$ds^2 = -\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right)dt^2 + \frac{r^2}{1+\frac{r^2}{R^2}} + r^2 d\Omega_{d-1}^2.$$

- Thermal AdS:

可进行替换 $t \to -i\tau$ 　$\tau \sim \tau + \beta$

[illegible] Proper length of τ circle: $\sqrt{1+\frac{r^2}{R^2}}\,\beta \geq \beta$ 　Bounded from below.

这种 case 下 Euclidean metric 是 well-defined 的

之前 Euclidean metric 是 singular 的 as $z \to \infty$

2. BH Solution on sphere.

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{1}{f} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2$$

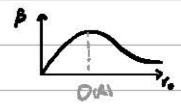
$$f = 1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{\mu}{r^{d-2}}$$

μ: parameter relate to BH mass

Horizon: r_0 satisfy $f(r_0)=0$

$\beta = \frac{4\pi}{f'(r_0)} = \frac{4\pi r_0 R^2}{d r_0^2+(d-2)R^2}$ 这给出 BH temperature 的描述 Go class 5

Horizon side. 且 r_0 determines entropy.



注意: ① 存在 β_{max} → T 存在 T_{min}.

② Given temperature 有2个 solution

记为 SBH BBH S—small B—big.

• 对 SBH: $r_0\downarrow$ — $S\downarrow$ — $T\uparrow$ 说明会辐射至蒸发 ⇒ negative specific heat

该区域对 $r < R$ 成立. 当 $r \ll R$ 是 flat space, 上述性质对应 flat space BH 性质

• 对 BBH: $r_0\uparrow$ $T\uparrow$ 对应 Positive specific heat.

这个符合 Thermal dynamics. (Thermal System)

3. Thermal gas 有一个 solution. BH 有2个, 给定 T 一共有 3 gravity solutions.

如何从上面的理解 AdS/CFT 在 AdS side 有3个解?

• 3 Gravity Solutions ⟷ CFT on S^{d-1} at T has 3 possible phases. — 图像是.

找到 Correct Correspondence 即对应于 lowest free energy

recall $Z_{CFT} = Z_{grav}$

$Z_{CFT} = e^{-\beta F}$, $Z_{grav} = \int D\Phi\, e^{S_E[\Phi]} = e^{S_E[\Phi_c]} + \cdots$

∴ $F \simeq -\frac{1}{\beta} S_E[\Phi_c]$

所以 Gravity Side 对应 Solution 对应于 largest S_E

• 从 Gravity Side 来看这个问题:

$Z_{grav}[\Phi] \simeq \sum_{\Phi \text{ is saddle pt.}} e^{S_E(\Phi)}$ 而我们找到3个 classical solution 表明有3个 saddle pt

∴ $Z_{grav} = e^{S_E}\Big|_{\text{Thermal AdS}} + e^{S_E}\Big|_{BBH} + e^{S_E}\Big|_{SBH}$

rmk. $S_E \propto G_N \propto \frac{1}{N^2}$

∴ Saddle with largest S_E dominate in large N limit.

(4): 找到 lowest free energy.

Claim: $S_E \propto \frac{1}{G_N} \propto \frac{1}{N^2}$

evaluate free energy for TAdS (thermal energy)

Claim: $S_E = 0 \cdot N^2 + O(N^0)$ → fluctuation, contributed by thermal graviton Gas

↓

Pure AdS → Thermal AdS, 改变了 topol structure for τ.

Global structure 改变了 fine 定义 Periodic 的了

• 若 Pure AdS 中 reference pt for S 是 0, 则 S_E 的解存在.

• $S_E(BBH) > S_E(SBH)$ 以 $\# \cdot O(N^2)$ Always hold.

验证: Big BH 而都大于 Small BH 于是对应更多 free energy

所以 B BH always dominate. (而 SBH 有 negative specific heat 于是这不是我们想要的. 正在看这)

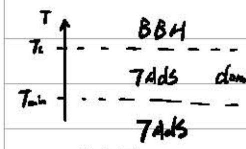
SBH never be a dominant phase.

Claim: There is a T_c. $T_c > T_{min}$

若 $T < T_{min}$ only TAdS. only phase can be used to describe field theory

$T_{min} < T < T_c$ $S_E(BBH) < 0$ 而 TAdS by def 是 0 ∴ TAdS 有更小 Free Energy ∴ TAdS 主导.

$T_c < T$ $S_E(BBH) > 0$ 则 BBH dominate.



于是 T_c 是 TAdS Phase transition into BBH

rmk: Finding S_E always divergent. , 需要 Renormalization —— cut off + counter term

rmk: Counter term 是 S_E for pure AdS. difference 是 finite 的. [Alternative way]

Assume BH 是 thermal 的 则 $S = \frac{\omega_{d-1} r_0^{d-1}}{4 G_N}$ ω_{d-1}: Vol of unit d-1 sphere.

r_0 是 temperature 的函数 $r_0 = r_0(\beta)$

则 $S = -\frac{\partial F}{\partial T} = -\frac{\partial F}{\partial r_0}\frac{\partial r_0}{\partial T} \overset{积分}{\Longrightarrow} F(r_0)$

则 $F = \frac{\omega_{d+1}}{16\pi G_N}\left(r_0^{d-1} - \frac{r_0^{d}}{R^2}\right)$　　rmk，$r_0 \to \infty$ 时 $F \to -\infty$

↑ BH free energy

rmk: ① Pure AdS 的 $F=0$，这里的 F 衡量了与 Pure AdS 的差异.

② 这里存在一个 r_c critical r.

Black Hole

$ds^2 = -f\,dt^2 + \frac{1}{f}\,dr^2 + r^2 d\Omega_2^2$ BH Solution

$f = 1 - \frac{r_s}{r}$ $r_s = 2G_N m$.

$A = 4\pi r_s^2$. BH Gravity

$\cdot\ \kappa = \frac{1}{2} f'(r_s) = \frac{1}{2r_s}$ Surface Gravity : stationary observer 的加速度 D

§ Causal Structure and Rindler Spacetime.

§ 近视界几何: $r \gtrsim r_s$

由于 $\frac{1}{f}\Big|_{r=r_s} \to \infty$ $\therefore f(r) \simeq f'(r_s)(r-r_s)$

• 近视界 Proper distance ρ $\quad \because d\rho^2 = ds^2 = \frac{1}{f} dr^2$

$$\therefore d\rho = \sqrt{\frac{1}{f}}\, dr$$

近视界: $d\rho \simeq \frac{1}{\sqrt{f'(r_s)}} \frac{dr}{\sqrt{r-r_s}}$

$$\rho \simeq \frac{2}{\sqrt{f'(r_s)}} \sqrt{r-r_s}$$

用 ρ 表示 f:

$$f \simeq f'(r_s)(r-r_s)$$
$$\simeq \left(\frac{1}{2} f'(r_s)\right)^2 \rho^2$$
$$\simeq \kappa^2 \rho^2 \quad \text{近视界的}f$$

$\therefore$ $ds^2 = -\kappa^2\rho^2 dt^2 + d\rho^2 + r_s^2 d\Omega_2^2$

定义 $\eta = \kappa t = \frac{t}{2r_s}$

$\therefore ds^2 = \underbrace{-\rho^2 d\eta^2 + d\rho^2}_{1+1\ \text{Mink}} + \underbrace{r_s^2 d\Omega_2^2}_{S^2}$

Rindler Form ; Rindler Space.

• 描述近视界几何, $\rho = 0$ 可描述 Horizon

· 关于 Rindler Form:

HI Mink: $ds^2 = -dT^2 + d\bar{X}^2$

令 $\bar{X} = \rho\cosh\eta$, $T = \rho\sinh\eta$

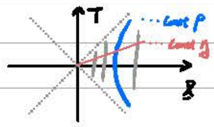
$\Rightarrow ds^2 = -\rho^2 d\eta^2 + d\rho^2$

而这仅是部分 Mink

$\because \bar{X}^2 - T^2 = \rho^2 \geq 0$

$\because \bar{X} = \rho\cosh\eta > 0$

$\therefore$ 只占 1/4 Patch



$\tanh\eta = \frac{T}{\bar{X}}$

$\rho^2 = \bar{X}^2 - T^2$

Note ① $\bar{X} = \pm T$ 作为 Boundary

对应 $\rho \to 0$, $\eta \to \pm\infty$ 而 $\rho e^{\pm\eta}$ 是 finite 的 — 组成 $\bar{X}, T$

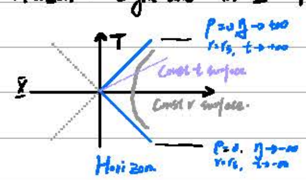
② $\bar{X} = T = 0$ 时 $\rho = 0$, 任意 finite η ($\because X \propto \rho e^{\pm\eta}$, $e^{\pm\eta}$ finite 即 well def)

· 由于 ρ 对应到 r_s 处奇

$\therefore \rho = 0$ 即在 Horizon 上. 换成 $\bar{X}, T$ 来定义, 则 BH Horizon $\longleftrightarrow$ $\bar{X} = \pm T$

· 而近视界几何: Rindler $\times S^2$

· Horizon: Light cone in $\bar{X} - T$



· 每个点代表 S^2 $r = r_s$

· $\rho - r$ 转换: $\rho = \frac{2}{\sqrt{f'(r_s)}}\sqrt{r - r_s}$

$\therefore$ Const ρ 就是 Const r

2d-Mink.

rmk: ① r = const 的 observer in 4-d Mink 在近视界几何中对应 ρ = const in Rindler Patch of M_2.

而 ρ = Const 在 M_2 描述一条运动的曲线; 所以 r = Const 运动起来的 而非静止.

Claim: Proper Acc $a = \frac{1}{\rho}$ in Rindler

$a = \frac{\sqrt{f'}}{2}\frac{1}{\sqrt{r - r_s}}$ BH Coordinate 下 描述的是 Local Proper Acc of obs

物理：BH施加引力，若想有 fix radius（环绕 BH 运动）则要有相应的 acc
当 $r \to r_s$ 时 加速度 $\to \infty$

rmk: ① Acc 与表面引力 K 的关系

Claim: acc of observer near horizon viewed from infinity 等于 $a_\infty = a(r) f^{\frac{1}{2}}(r) = K$.

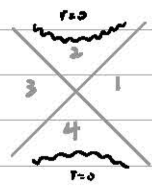
$a^\mu = u^\nu \nabla_\nu u^\mu$

② Free Fall Obs near BH horizon $\longleftrightarrow$ a inertial obs in M_2

Free Fall observer 走的是 Geodesics，而闵氏空间的 Geodesics 是 Straight line

我们知道在视界附近是 M_2 的所以测地线 $\longrightarrow$ Straight Line.

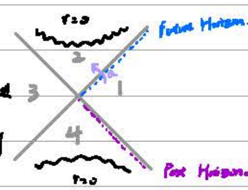
③ Rindler Coord (ρ, η) 在 $\rho \to 0$ 时变成 Singular [X, T 与 ρ, η 不 1-1 对应]



Rindler Coord 在 $\rho=0$ 是 Singular 的
但 (X, T) 可以将 (ρ, η) 从 I 推到 full M_2.
$\Rightarrow$ Changing suitable coord, [Kruskal Coord]
one can extend schwartzschild geometry to full region
类似从 Rindler Patch 推到完整 Mink，这个坐标下可将 Schwarzchild 扩张

Full Causal Structure: 注意，仅有在 Near Horizon 附近才可用 Rindler Coord，但可以将 Near Horizon 部分 extend 到 Full space Time around BH

用 Penrose Diagram 表示 (a) • Fall into BH: 从 I ⇒ II
• 而且 No information or material 能从 II 进入到 I。由于 Horizon 是 light trajectory



(b): region III, IV 和 I II 类似，可通过 time reversal 得到。
但是对 Real BH, III, IV 不存在（不可通过坍缩形成）

(c): I 中 obs 不可能 influence IV

(d): Horizon 左右 t 度变号 $\longrightarrow$ t 与 r 角色调换，于是 $r=0$ act like a "const time surface"
而 $r=0$ 叫 space like singularity since $r \to$ time

Black Hole Temperature

Hawking: 将 BH 外的场量子化 对 BH 不变. ⟶ BH 有 temperature act like 黑体

将 Geometry — classical / Matter — Quantum. 得到 BH 辐射 热谱的 spectrum

- QFT 中 讨论 finite temperature 时 使用 Euclidean signature. $t \to -i\tau$. 且 $\tau \sim \tau + \hbar\beta$ $\beta = \frac{1}{T}, k_B = 1$

rmk: Euclidean signature 变回 Lorenzian signature 时 对应 finite temp

这里: 将 BH 解析延拓到 Euclidean signature 上, 对应的 Euclidean Time of BH 为了消除奇性 必须是 periodic 的 于是 By consistency, 变回 Lorenzian signature 一定是 finite temperature 的.

推导: For BH, $t \to -i\tau$

$$ds_E^2 = f d\tau^2 + \frac{1}{f} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2$$

⇓ Near Horizon

$$ds_E^2 = \rho^2 k^2 d\tau^2 + d\rho^2 + r_s^2 d\Omega_2^2$$

记 $\theta = k\tau$

则 $ds_E^2 = \rho^2 d\theta^2 + d\rho^2 + r_s^2 d\Omega_2^2$

2D Euclidean Flat Space (极坐标)

但 $\theta = k\tau$ 不一定在 $[0, 2\pi]$ 取值

rmk 这个坐标 将会有 Conical Singularity  对应于 θ 的周期 非 2π 的 case.

- 然而 Rindler Coord 知 Horizon 是 Smooth 的, 是 non-singular 的 则 必是 Periodic 的. $\tau \sim \tau + \frac{2\pi}{k}$
- 由有限温度场的 claim 知 τ 的 周期 $\frac{2\pi}{k} \sim \hbar\beta$, 所以 BH 附近的时空 要想 让其 QFT 在 wick rotate 后 无 singularity, 则 我们 要求 Lorentzian 时空 带有了 QFT 在 有限温度的

rmk: 上述 坐标 周期 在无穷远 观者的 周期 时 ⟶ 于是 observer at $r=\infty$ 一定会 feel 一个有限温度场 given by $T = 1/\beta = \frac{\hbar k}{2\pi} = \hbar/4\pi r_s = \frac{\hbar}{8\pi G_N M}$ [在 BH Space Time 中 放入一个 QFT, QFT 一定带有温度]

- 对于 obs at r: $dt_{loc} = f^{\frac{1}{2}}(r) \cdot dt$,

$$T_{loc} = f^{-\frac{1}{2}}(r)\, T_\infty = \frac{\hbar k}{2\pi} f^{-\frac{1}{2}}(r)$$ (当 $r \to r_s$ 时 趋于 $+\infty$) ← 温度 反比于 时间

Observer feels hotter and hotter when approaching to horizon

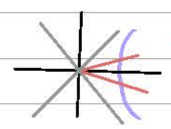
• 上面的讨论是Mink. 现把这个讨论放在Rindler Spacetime中:

Rindler: $ds^2 = -\rho^2 d\eta^2 + d\rho^2$

令 $\eta = -i\theta$

$ds_E^2 = \rho^2 d\theta^2 + d\rho^2 \xrightarrow{\text{消除锥奇性}} \theta \sim \theta + 2\pi$

则 observer WHO USE "η" 也会感受到 finite temp ! 而不是standard mink



当 $d\rho = 0$ 时 $ds = \rho d\eta$ 这个告诉我们用的η是什么

Rindler Obs: const ρ i.e $dt_{loc} = \rho d\eta$

对应欧氏空间: $d\tau_{loc} = \rho d\theta$

$\tau_{loc} \sim \tau_{loc} + 2\pi\rho = \hbar\beta$

$\Rightarrow \therefore T_{loc}(\rho) = \frac{\hbar}{2\pi\rho} = \frac{\hbar a}{2\pi} \quad a = \frac{1}{\rho}$

• 即 位于ρ的Rindler观察者感受到的T是$\frac{\hbar a}{2\pi}$ Claim: 这里的physics由加速度 a 描述

• Cor: Any Minkowski obs with nonzero acc will feel be at finite temp

i.e: free falling into BH. 感受不到Temp; 但若是 Circling around BH 则 感受得到了

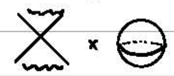
• In Mink. time, an acc obs will feel a temperature propto its acc

(Unruh Temperature)

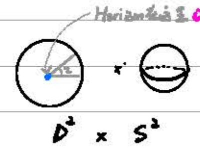
Lec 4:

BH: $ds^2 = -f\,dt^2 + \frac{1}{f}\,dr^2 + r^2 d\Omega_2^2$

Full Causal Structure of Schwarzschild



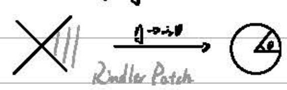
Go to Euclidean Signature →
且 $\tau \sim \tau + \frac{2\pi}{\kappa}$
为了避免 Horizon 奇性.



而这个 Periodic in Euclidean Spacetime 对应的 Lorentzian Signature 的物理是 finite T

亦可在 Rindler Space 下作操作:

$ds^2 = -\rho^2 d\eta^2 + d\rho^2$



$\theta \sim \theta + 2\pi$ $T(\rho) = \frac{\hbar}{2\pi\rho} = \frac{\hbar a}{2\pi}$

§ Physical Interpretation Of Temperature

BH Spacetime 中的 QFT. 的 Vacuum State 通过 Euclidean Signature 解析延拓的是 thermal equilibrium state with stated temperature.

→ 讨论 Temperature 时要指定 time! 这里的 temperature 对应的 Time 是 Observer using $ds^2 = -f\,dt^2 + \frac{1}{f}dr^2 + \cdots$ 中的时间

而 t 作为坐标时 对应于 ∞处观测者的固有时. 所以说 ∞处观测者看到的 T: $\frac{\hbar\kappa}{2\pi}$

若在 Coord Trans 下使用 Rindler Coord, 则对位于 ρ 的观测者 $T(\rho) = \frac{\hbar}{2\pi\rho}$ [Local Temp]

η 对应的 Temp 是 $\frac{\hbar}{2\pi}$.

Rmk:

① QFT 里的真空不唯一. ———→ QFT 中需有各时对称关系. 所以不同的时间切片将带来不同 QFT 理论. 所以对 Curved Space Time: Vacuum 是 observer dependent 的.

· 对 BH: (2) 我们选的 Vacuum 是 Hartle-Hawking Vacuum [紧致化 t 的]

· 对 Rindler Patch: 我们选 Mink Vacuum Reduced to Rindler Patch (β) 我们若不紧致化 τ，而在一个不同的流形上定义的 Euclidean Theory 延拓到 Lorentzian Vacuum 时 得到 Schwarzschild Vacuum / Boulware Vacuum

rmk. 这些本质的区别 Vacuum ——→ 对时间进行正则量化，是时间上得到的 Vacuum.

[不紧致化 τ 得到 这个 Vacuum] (思考细节)

For Rindler

若 θ 是不紧致化的我们定义 Rindler Vacuum. [直接对 t 正则量化]

rmk: 在 Schwarzschild Vacuum, 对应 manifolds 是 singular at horizon ($r=r_s$)

$\Rightarrow$ Observables like correlation func are often singular at horizon when analytic continue to Lorentz signature

e.g. Stress Tensor of this field theory blow up at horizon.

但在 H-H Vacuum 并非如此. 所以考虑 Physics 时常用 H-H. (Horizon 是 Smooth 的)

rmk: 2 种 Vacuum 对应了 … 中的 high excited state.

Physical Origin of Temperature:

还是用 Rindler Example to Explain.

(a) $\theta \sim \theta+2\pi$ ——→ 决定了我们的 choice of mink. vacuum

(b) 一种新看 T 的方式 (之前是直接从周期性看出，而是用 thermal density matrix)

总之是： 当我们选了 Periodic 7 我们就是选定了特定的 Vacuum. 而 Mink observer 眼中的 0-temp state 现在变成了 Rindler Obs 的一个 thermal state

↙

- Cor: The Mink Vacuum appears to be a thermal state with $T=\frac{\hbar a}{2\pi}$ (or $T=\frac{\hbar}{2\pi}$ in terms of η) to a Rindler obs with const a

证明之前，Preparation:

有2种 thermal state 的描述

(A) ○ 用单个 h.o (谐振子) at finite temp 为例

$$\langle O \rangle_T = \frac{1}{Z} Tr(O\, e^{-\beta H}) \quad \leftarrow \text{一般的 } \langle\cdot\rangle \text{ 计算}$$

$$= Tr(O\, \rho_T)$$

ρ_T : thermal density matrix $\begin{cases} \rho_T \equiv \frac{1}{Z} e^{-\beta H} \\ Z \equiv \sum_n e^{-\beta E_n} \end{cases}$

另一种处理 Finite Temperature Physics 的方法 ↓

② Umezawa:

考虑 2 copies of same system $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ System

2 copies without interaction H_1 H_2 Hamiltonian operator

这种 Sys 下的 Typical State: $\sum_{mn} a_{mn} |m\rangle_1 \otimes |n\rangle_2$

现在考虑这样一种 State: $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}} \sum_n e^{-\frac{\beta E_n}{2}} |n\rangle_1 \otimes |n\rangle_2$

entangle state between 2 sys

考虑 $\langle\Psi| O(1) |\Psi\rangle = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n|O|n\rangle$

$= \langle O \rangle_T$

O 是一般算符

$Tr_2(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} |n\rangle_1\langle n| = \rho_T$

于是 ρ_T in one sys 等价于 entangled pure state of double sys !

We know Nothing about Sys 2 ∴ Trace out sys 2 消自 Trace out the second sys.

于是可以说 ρ_T 源自我们的 ignorance on sys 2

于是 Temperature arises due to our ignorance of sys 2.

rmk:

1. 这种 Double Sys Applies to any QFT Sys.
2. $|\Psi\rangle$ is annihilated by $H_1 - H_2$. (由于仅有 $|n\rangle_1 \otimes |n\rangle_2$) ($H_2$ 只是 H_1 的 Copy)
3. For h.O $\quad |\Psi\rangle = \frac{1}{Z} \exp[e^{-\frac{\omega\beta}{2}} \cdot a_1^+ a_2^+]\, |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$

   ↓ • 这种态叫 Squeeze state

   这个态 $|\Psi\rangle$ 很适合像是真空的平移

4. 可以有如下关系: $\hat{b}_1 |\Psi\rangle = \hat{b}_2 |\Psi\rangle = 0$

   可 Check

   $\hat{b}_1 = \cosh\theta\, \hat{a}_1 - \sinh\theta\, \hat{a}_2^+$ $\cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-\beta\omega}}}$

   $\hat{b}_2 = \cosh\theta\, \hat{a}_2 - \sinh\theta\, \hat{a}_1^+$ $\sinh\theta = \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\omega}}{\sqrt{1-e^{-\beta\omega}}}$

• Bogoliubov Transformation ⟶↑

Interpretation: $a_1\ a_2$ 的真空态是 $|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2$

则 $|\Psi\rangle$ 是 $b_1\ b_2$ 的真空态

关于 h.o ↑
Wave Func ↓

(b) Schrödinger Representation of QFT:

↳ 这里讨论 wave functional 而非 states

Consider scalar field. $\phi(\vec{x},t)$

位形空间: $\phi(\vec{x}, t=t_0) = \phi(\vec{x})$ 给定 time slice 下的位形空间.

Hilbert Space: $\mathcal{H} = \{ \Psi[\phi(\vec{x})] \}$ 以 $\phi(x)$ 为变量的 Wave Fn.

· 考虑 $\langle \phi_2(\vec{x}), t_2 | \phi_1(\vec{x}), t_1 \rangle$ t_2 时刻的 ϕ_2 位形与 t_1 时刻的 ϕ_1 位形的 OVERLAP.

$$= \int_{\phi(t_1,\vec{x})=\phi_1}^{\phi(t_2,\vec{x})=\phi_2} D\phi \; e^{iS[\phi]}$$ S: action for this theory

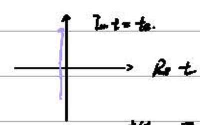
· 考虑 Vacuum Wave Functional: $\langle \phi(\vec{x}) | 0 \rangle$ 真空态与位形态的 overlap!

$\langle \phi(\vec{x}) | 0 \rangle = \Psi_0[\phi(\vec{x})]$ ⟶ 对应的 functional.

Ψ_0 的计算:

1. 将 time 复化

2. 选择纯虚部分积分.



$$\Psi_0[\phi(\vec{x})] = \int_{t_E<0}^{\phi(t_E=0,\vec{x})=\phi(\vec{x})} D\phi(t_E,\vec{x}) \; e^{-S_E[\phi]}$$

积分所有可能的位形 ϕ 从 $\phi(t_E=-\infty)$ 到 $\phi(t_E=0)$

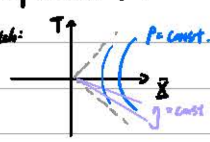
recap: QM 中 基态的 Wave Func. & Path Int.

$$\langle x | 0 \rangle = \psi_0(x) = \int_{t_E<0}^{x(t_E=0)=x} D x(t_E) \; e^{-S_E[x]}$$

续上结束.

Rindler Space 中的 QFT:

1. Rindler Patch:



$$ds^2 = -dT^2 + dX^2$$

$$= -\rho^2 d\eta^2 + d\rho^2 \quad \text{rindler}$$

2. Go to Euclidean Signature: $T \to -iT_E$
$y \to -i\theta$

对原来的测度结构重载:

$$ds_E^2 = dT_E^2 + dX^2$$
$$= \rho^2 d\theta^2 + d\rho^2$$

3. $\theta \sim \theta + 2\pi$ 以得出的发现 Rindler $\simeq$ Mink (in Euclidean)
都是 Full Euclidean Space

=> 于是 Euclidean Observables are identical in 2 theories

对 Mink space 来说: Euclidean functions → Correlation functions in mink Vaccum. (无 Temperature)
Rindler Patch 来说: → - - - (but for observable restricted to Rindler Patch) (有 Temperature)

- where is the temperature come from?
- 考虑 Rindler Hilbert Space:

$\mathcal{H}_{Rind} = \{\Psi[\phi_R]\}$ ϕ_R 指的是 right patch $\phi_R = \phi(X>0, T=0)$

H_R: wrt y [关于 y 对应的 Hamiltonian]
Hamiltonian for rindler

然后写出 Hamiltonian Quantize the Theory:

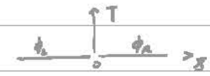
$\{|n\rangle_R\}$ a compelete set of eigenstate for H_R, with eigenvalue E_n
其中 $|0\rangle_R$: Rindler Vaccum

- 考虑 Mink 的 $\mathcal{H}_{mink}$:

mink: H_{mink} 的正则变量是 T

对应的 Hilbert Space $\mathcal{H}_{mink}$: $\{\Psi[\phi(X)]\}$
H_m : wrt T
Vacuum: 记作 $|0\rangle_M$
考虑 Vaccum Functional: $\Psi_0[\phi(x)] \equiv \langle\phi(x)|0\rangle_M$

Key observation: $\phi(\vec{x}) = (\phi_L(\vec{x}), \phi_R(\vec{x}))$

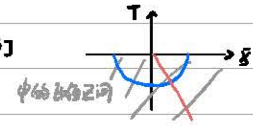


① 由于我们之前说了 Mink的描述与 Rindler 一致

所以 $\mathcal{H}_{mink} = \mathcal{H}_L^{Rind} \otimes \mathcal{H}_R^{Rind}$

P.S $\langle \phi(x) | 0 \rangle_m = \Psi_0[\phi_L(\vec{x}), \phi_R(\vec{x})]$ 12 保证这种形式

② 由于 $\langle \phi(x) | 0 \rangle_m = \Psi_0[\phi(x)] = \int_{t_E<0}^{\phi(t_E=0,\vec{x})=\phi(\vec{x})} D\phi(t_E,\vec{x})\, e^{-S_E[\phi]}$



换成走极坐标 $= \int_{\phi(\theta=-\pi,\rho)=\phi_L(\vec{x})}^{\phi(\theta=0)=\phi_R(\vec{x})} D\phi(\theta,\rho)\, e^{-S_E[\phi]}$

考虑 $\langle \phi_2(\vec{x}), t_2 | \phi_1(\vec{x}), t_1 \rangle = \langle \phi_2 | e^{-iH(t_2-t_1)} | \phi_1 \rangle$

QCD Lagrangian

刘宏 AdS CFT

大N展开:

• $\mathcal{L} = \frac{1}{g_{YM}^2}\left[-\frac{1}{4}\mathrm{Tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\bar{\Psi}(\not{D}-m)\Psi\right]$ QCD Lagrangian

$A_\mu = A_\mu^a T^a$ $T^a \in SU(3)$

't Hooft 大N展开

$N=3$ 作为一个参数，将 A_μ 从 $3\times3 \longrightarrow N\times N$. 考虑 $N\to\infty$, 作 $\frac{1}{N}$ 展开

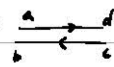
• 't Hooft 双线型 & Topological Feynman Diagram.

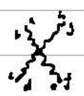
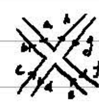
考虑 $\mathcal{L} = \mathcal{L}[\Phi^a{}_b]$ 这里 $\Phi^a{}_b$ 是 $N\times N$ 厄米矩阵. $\Phi^{a*}_{\ b} = \Phi^b{}_a$

有Global U(N)对称性

$\mathcal{L} = -\frac{1}{g^2}\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\Phi^a{}_b\,\partial^\mu\Phi^b{}_a + \frac{1}{4}\Phi^a{}_b\Phi^b{}_c\Phi^c{}_d\Phi^d{}_a\right]$

○ Feynman 规则:

$\langle\Phi^a{}_b(x)\Phi^c{}_d(y)\rangle = g^2\delta^a{}_b\delta^c{}_d\,G(x-y)$ 记作 g^2 

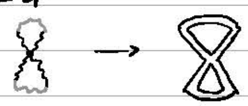
Vertex  $= \frac{1}{g^2}\delta^a{}_h\delta^c{}_b\delta^e{}_d\delta^f{}_j$ 记作 $\frac{1}{g^2}$ 

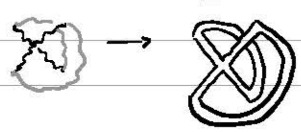
* Claim 一个loop对应一个Contraction

则一个Closed Loop贡献一个 N e.g. $\delta^a{}_b\delta^b{}_a = N$

○ 真空图: 3个loop $\longrightarrow N^3$ 2个传播子+一个顶点 $\longrightarrow g^2$

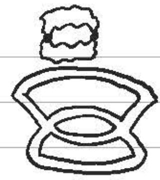
一个loop $\to N$

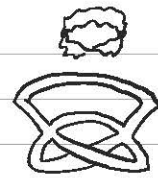
a 

b 

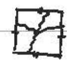
Claim 2个图只有不同的顺序因为 matrices 不 commute

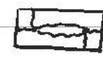
在图的层面上: 一个是平面 一个是非平面

c 

d 

- N Counting 技巧:
  - Lemma 1: b. d 可画在 Torus上

    b:  1

    d:  2.

  - Lemma 2: # of N = # of faces when straighten out

    1. 当为平面图时 直接数 Loop
    2. 当为非平面图展开时. 由于每个 Patch 都可用面积连通 ∴ 连一个 Surface.

Lec 7:

★ Topology: 不同的 2D surface h相同, 则topol等价　　h: # of genus 亏格.

★ χ: $2-2h$

○ 振幅:

★ Claim: ① 所有非平面图, 存在唯一h s.t 非平面图可在 genus-h的曲面上 straightened out

② # of N = # of surface of genus-h.

$$A \sim (g^2)^E \cdot (g^2)^{-V} \cdot N^F$$

★ 't Hooft 的大N展开: 让 $g^2 N = \lambda$, $N \to \infty$ 但 $g^2 \to 0$

$$\therefore A \sim \lambda^{E-V} \cdot N^{F+V-E} = \lambda^{L-1} \cdot N^{\chi}$$

Lemma:

- L: $E-V+1$:= # of loops in diagram.
- $\chi = F+V-E = 2-2h$

#Loops = # of undetermined momentum

每个 edge 代表一个 momentum　　Euler Thm: . . .

每个 vertex 有一个 δ函数代表着动量守恒

还有一个总的 Conservation

- 每个费曼图可以看作 a partition of the surface into polygon

$A \sim \lambda^{L-1} N^{2-2h}$

't Hooft limit 下 Planar Diagram 占主导:

↳ 考虑所有的真空图之和. $= \sum_h \sum_L c \cdot \lambda^{L-1} \cdot N^{2-2h}$ 　　rmk: $\sum c \cdot \lambda^{L-1}$ 收敛, 定义为 $f_0(\lambda)$

∵ 考虑 Large N, 所以只考虑 $N^2 \sum_L c \lambda^{L-1}$ 　　35 min

L 代表 Planar Diagram 上的 Loop

记作 $N^2 \cdot f_0(\lambda)$

- Vacuum Energy 即 $\log Z = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h} f_h(\lambda)$ 　　Vacuum Energy 的结构.

(Sum over all connected vacuum diagram)

而 $Z = \int D\Phi \, e^{iS[\Phi]}$

- 另一种理解 $A \sim N^2$ 的方式

$\mathcal{L} = -\frac{N}{\lambda} Tr(\cdots)$ 　　$Tr[\cdots]$ 也带了一个 N

即 Large N limit 对任何形如上式的 theory, large N 展开了都有 $\log Z = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h} f_h(\lambda)$

即 这种形式的 theory, 't Hooft limit 下 展开 ≅ Feynman 图的 topol 展开

rmk 关于 Non Orientable Situation:

若理论不用 Hermitian Matrix 描述, i.e real symmetric matrix, "No difference between 2 index"

则将 relate to no orientable surface.

§ General Observable

- rmk: Gauge / Global Sym:

a: $\mathcal{L} = -\frac{1}{g^2} Tr[\frac{1}{2}(\partial\Phi)^2 + \frac{1}{4}\Phi^4]$ 　　⟵ U(N) Global Sym: $\Phi \to U \Phi U^{+}$

b: $\mathcal{L} = -\frac{1}{g^2_{YM}} F^{a}_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_{a}$ 　　⟵ Inv Local Sym 　$A_\mu \to U(x) A_\mu(x) U^{+}(x) - i \partial_\mu U(x) U^{+}(x)$

U(x) 有 arbitrary spacetime dependence

difference: 对 a: $\Phi^2(x)$ is an allowed operator.

对 b: 仅允许 Gauge-Inv Operator

Gauge Theory 中 allowed local operator: $Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$, $Tr(\Phi^2)$, ⋯ Single Trace Operator

$Tr(\cdots)Tr(\cdots)$ Multiple Trace Operator. Product of Single

记 Single Trace Operator: $O_n(x)$

- General Observable: Correlation Function of gauge-inv operators. $\langle O_1(x_1)\cdots O_n(x_n)\rangle_c$ ← Connected

- N dependence of $\langle O_1(x_1)\cdots O_n(x_n)\rangle_c$:

trick: 加入 N

考虑 Path Integral: $Z[J_1\cdots J_n] = \int DA_\mu D\Phi \, \exp[iS_0 + iN\int J(x)O(x)]$ (underlined: S_{eff})

$$\langle O_1(x_1)\cdots O_n(x_n)\rangle_c = \frac{\delta^n \log Z}{i^n \delta J_1(x_1)\cdots\delta J_n(x_n)}\frac{1}{N^n}$$

而 O is single trace operator, 于是 S_{eff} 里的 J 对应 $N\cdot Tr[\cdots]$ 结构.

于是 前面 而 then

$$\log Z[J_1\cdots J_n] = \sum_{h=0}^{\infty} N^{2-2h} f_h(\lambda, J, \cdots)$$

所以 $\langle O\cdots O_n\rangle = \frac{\delta^n \log Z}{i^n \delta J_1(x_1)\cdots\delta J_n(x_n)}\frac{1}{N^n}$

$$\sim \sum_{h=0} N^{2-2h} f_h(\lambda, J\cdots)\frac{1}{N^n} \sim N^{2-n}\left(1 + O(\tfrac{1}{N^2}) + \cdots\right)$$

于是 $\langle 1\rangle_c \sim O(N^2) + \cdots$ 而 leading order 是 Planar diagram 描述. $(h=0)$

$\langle O\rangle_c \sim O(N) + \cdots$

$\langle OO\rangle_c \sim O(1) + \cdots$

- Physical implication:

① Large N limit 下 $O_i(x)|0\rangle$ 可以被 interpreted as creating single particle state

$O_1\cdots O_n|0\rangle$ n particle state.

PF: $\langle O_i O_j\rangle_c \sim O(1)$, 将 $\langle O_i O_j\rangle$ 归一化 $\propto \delta_{ij}$ 所以在 2pt function level 每个 operator 可以看作 independent.

Lec 8

② $\langle O(x) : O O_3(y) \rangle_c$ act like 3-pt function ∴ $\sim O(\frac{1}{N})$

single tr double tr

考虑 overlap: 由于 $N \to \infty$ 该关联函数趋于 0 ∴ 自然解释为 there is no mixing between single trace 和 double trace operator.

Propagating of 2 particles

③ $\langle : O_1 O_2 : (x) \; : O_1 O_2 : (y) \rangle = \langle O_1(x) O_1(y) \rangle \langle O_2(x) O_2(y) \rangle + \langle O_1 O_2 O_1 O_2 \rangle_c$

由于上面的 operator diagonalised $\sim O(\frac{1}{N^2}) \to 0$

(asymptotic state)

- 不是说这些 state 是 essentially a particle on shell，只是说这些 state 行为像是 single operator

1. Glueball State: single trace operator → single particle state
   multi trace operator → multiparticle state

   $O_1|0\rangle$

2. · fluctuation of "glue balls" suppressed if $\langle O \rangle \neq 0$

suppose $\langle O \rangle \neq 0$

$$\langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2 = \langle O^2 \rangle_c \sim O(N^0)$$

Full part. Disconnected part

于是 $\frac{\sqrt{\langle O^2 \rangle_c}}{\langle O \rangle} \sim \frac{1}{N} \to 0$ 而 $\frac{\sqrt{\langle O^2 \rangle_c}}{\langle O \rangle}$ 这就是 fluctuation

$\langle O_1 O_2 \rangle = \langle O_1 \rangle \langle O_2 \rangle + \langle O_1 O_2 \rangle_c$ 因此 (large N)· Disconnected part always factorized

$\langle O_1 \rangle \langle O_2 \rangle \sim O(N^2)$, $\langle O_1 O_2 \rangle_c \sim O(1)$ Connected part 太小. 于是看上去像 classical theory

3.