弦论主要讨论几个方面

1.从经典相对论性点粒子作用量推广到$S_{NG}$再推广到$S_P$

2.对Polyakov作用量进行量子化

3.由量子化后的激发态以及相应的场

4.玻色弦的不完备以及超弦理论

5.弦与荷

6.弦的对偶

# 1.Action

从相对论性点粒子作用量，我们形式上推广得到的弦在时空中运动的作用量，最直白的推广形式是$S_{NG}$ NG代表Nambo Goto。同样的我们可以再推广得到更高维的物体Brane 对应的是$S_{DBI}$ Dirac Born Infeld Action的特殊形式。但我们先研究弦论。

- Nambo Goto作用量：

作用量=世界面的面积 $S_{NG}=T\int d^2\sigma\sqrt{-\det h}$。其中$\gamma_{\alpha\beta}=\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma^\alpha}\frac{\partial X^\nu}{\partial\sigma^\beta}\eta_{\mu\nu}$是诱导度规

路径积分一般用于多项式型作用量，显然根式形式不利于后续写成路径积分的形式。我们引入额外度规场，得到我们想要的作用量。

- Polyakov作用量：

引入了世界面上的额外的度规场$g_{\alpha\beta}$后我们将作用量写作$S=\frac{1}{4\pi\alpha}\int d^2\sigma\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu\eta_{\mu\nu}$

写出运动方程与NG作用量的运动方程相同，所以这个作用量经典层面上与NG等价并且形式是我们想要的多项式型，但代价是引入了额外的场，所以需要引入Constraints。

- 规范固定：

  考虑Polyakov作用量的对称性，我们可以将平坦时空作用量写作$S=\frac{1}{4\pi\alpha}\int_\Sigma d^2\sigma\partial_a X\cdot\partial_b X$ 后续我们将用这种共形规范下的形式。在这种形式下容易得到运动方程,将其在光锥坐标下写开将方便后续量子化时进行模式展开。虽然我们规范固定了，但关于$\gamma$也将有相应的运动方程，只不过叫做constraint。

相关作用量的细节讨论见【poly-NG】

- 作用量中加入黎曼张量： 在作用量中引入新的项时，不应该破坏原有的对称性，且在一定条件下可以还原到原来的作用量。这里的R代表二维世界面曲率，如下作用量满足我们要求，具体论证见【topol-term】

$$\chi = \lambda(\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} d^2\sigma\sqrt{-\gamma}R + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Sigma} dsK) = \lambda\chi(\Sigma)$$

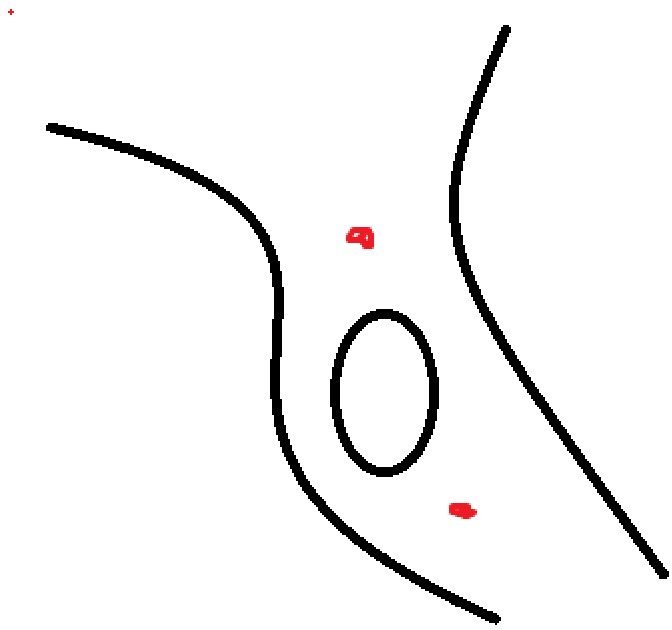
这里$\chi(\Sigma)$代表世界面$\Sigma$上的Euler Number，其中genus数与boundary数分别定义为$(g, b)$

$$\chi(\Sigma) = 2 - 2g - b$$

**物理解释：**

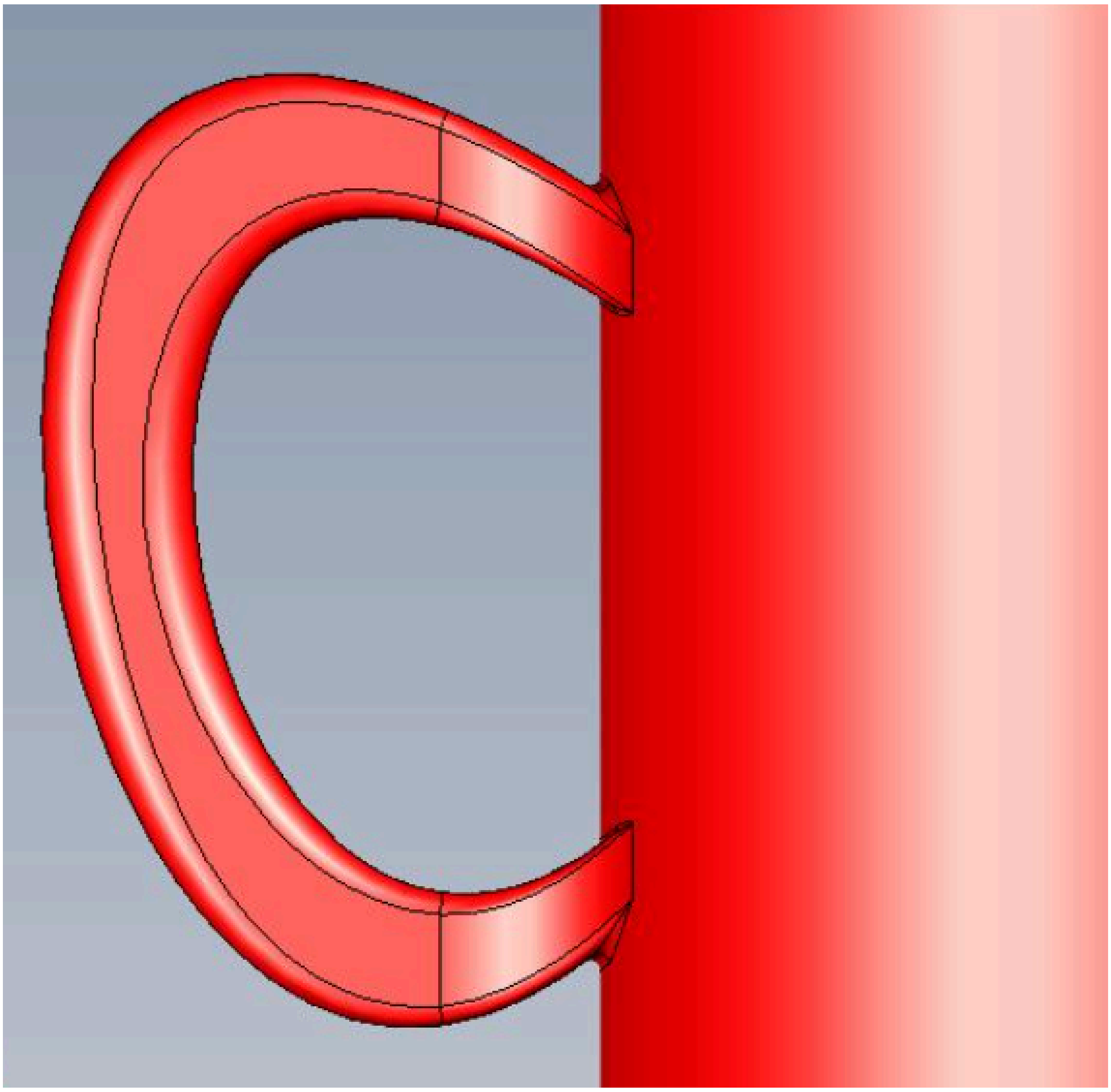
  - 开弦的相互作用： 一根开弦分开又粘合，对应于两个开弦节点。该过程中世界面多了一个边界，所以每个开弦节点都自然被赋予权重

$$g_o = e^{\lambda/2}$$



  - 闭弦相互作用 一根闭弦的相互作用相当于增加一根把手也就是多一个亏格，场论角度对应于两个闭弦节点，于是闭弦节点自然被赋予权重

$$g_c = e^{\lambda}$$



# 2.Quantization Intro

之前不完备的路径积分已经粗糙的将弦理论量子化了，(后续需要进行规范固定)，但是路径积分并不能很好的表述出质量谱以及粒子态。而粒子态又能对应于弦理论描述的场性质。所以这里需要重新进行正则量子化。

**量子化方案**

我们使用polyakov引入了两个场$(\gamma_{ab}, X^{\mu})$，我们并不把$\gamma$视作动力学变量--只是拉氏乘子一样的约束。唯一的动力学变量只有$X^{\mu}$.所以弦论的量子化不同于标量场的地方在于我们要在约束条件下进行量子化。

主要有两类:

1.Covariant Quantization--在不考虑约束情况下进行量子化，得到粒子态以及Hilbert Space。将约束施加在Hilbert Space上得到物理的粒子态。

2.在约束条件下求解运动方程，对真正的动力学变量进行量子化 也就是Light Cone Quantization

3.路径积分量子化需要考虑规范固定，也就是使用BRST方法

所有细节讨论详见【弦论量子化方案】最终得到的结果是弦的激发态以及质量谱。

# 3.Spectrum and Field。

经过规范固定我们可以量子化这个理论。其中找到的正则动量对体积的积分得到总动量，弦的运动方程和constraints决定了动量密度和振动模式的约束。如果弦是on-shell的，那么我们得到弦的动量与振动模式有关。从而得到弦的谱。不同的激发态有不同的洛伦兹因子，所以在洛伦兹变换下有不同的性质，这些激发态便描述了弦激发的场。所以我们分析弦的谱，讨论弦的激发态，最终得到弦论描述的场的性质。

# Bosonic Part:

**state** 由于弦的运动方程决定了弦的态的基态结构$|0,p^{\mu}\rangle$，其中$p^{\mu}$代表弦的COM动量，而相应的激发态由模式展开到$\alpha_i^{\mu}$作用于基态得到。

**Open String spectrum**：

$$M^2=\frac{1}{\alpha'}\sum_{i=2}^{D-1}\sum_{n=0} nN_n^i-\frac{D-2}{24\alpha'}$$

- Ground State: $|0,p^{\mu}\rangle$

  质量--$M^2=-\frac{D-2}{24\alpha'}$，如果背景时空维数D>2，我们将得到一个负质量的基态叫做Tachyon,更多内容见【tachyon】

- First Excited State:$\alpha_{-1}^i|0,p^i\rangle$

  质量--$M^2=\frac{26-D}{24\alpha'}$

- Second Excited State：$\alpha_{-1}^i\alpha_{-1}^{\prime}|0,p^{\mu}\rangle$或者$\alpha_{-2}^i|0,p^{\mu}\rangle$

  质量--$M^2=\frac{2}{\alpha'}+\frac{26-D}{24\alpha'}$

rmk:

**玻色弦的时空维度：** 1.Claim：D维空间有质量的Vector boson的DoF是D-1，对应的不可约群表示是对应的李群是$SO(D-1)$；无质量的是Dof是D-2，对应的不可约群表示李群是$SO(D-2)$。

2.我们进行光锥量子化后，我们的第一激发态$\alpha'^{I} \mid 0, p\rangle$中指标I的取值只能是$D-2$个坐标。这个激发态在洛伦兹变换下表现的像矢量粒子，但是原先的$SO(D-1,1)$对称性破缺成$SO(D-2)$。

虽然我们使用的规范并不满足洛伦兹协变性，但是这个理论本身满足洛伦兹协变性，所以Hilbert space中的粒子态满足相应的代数，也就是说粒子态应当满足wigner定理。我们要求第一激发态是无质量的则要求时空背景是D=26。**所以开弦的最低激发态就是光子。**

**有质量引力子：** 对于第二激发态，一个指标的态有24个Dof，两个指标态有$24 \times 25/2$个Dof.总共324个Dof，对应$SO(25)$symmetric traceless second-rank tensor. 第二激发态可作为$D = 26$的有质量引力子的不可约表示。 **质量分布** $\Delta M^2 = \frac{1}{\alpha'}$ 质量平方以$\frac{1}{\alpha'}$等间距分布

**Close String spectrum：**

相比于开弦，为了满足constraints，我们需要有level matching条件，也就是$N = \tilde{N}$。这里考虑背景时空维数为$D = 26$

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} \sum_{i=2}^{D-1} \sum_{n\pm 6} n(N_n^i + \tilde{N}_n^i) - \frac{D-2}{6\alpha'}$$

- Ground State： $\mid 0, p^\mu\rangle$

  质量--$M^2 = -\frac{D-2}{6\alpha'}$

- First Excited State：$\alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j \mid 0, p^\mu\rangle$

  质量--$M^2 = \frac{26-D}{6\alpha'}$

- Second Excited State：

$$\begin{cases} \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \tilde{\alpha}_{-1}^k \tilde{\alpha}_{-1}^l \mid 0, p^\mu\rangle \\ \alpha_{-2}^i \tilde{\alpha}_{-1}^k \tilde{\alpha}_{-1}^l \mid 0, p^\mu\rangle \\ \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \tilde{\alpha}_{-2}^k \mid 0, p^\mu\rangle \end{cases}$$

质量--$M^2 = \frac{4}{\alpha'}$

rmk:

1. 第一激发态在洛伦兹群下的作用下可以分成三种可以分解成三种不可约表示：

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_{-1}^{\{\mu}\tilde{\alpha}_{-1}^{\nu\}}\mid 0\rangle \\ \alpha_{-1}^{[\mu}\tilde{\alpha}_{-1}^{\nu]}\mid 0\rangle \\ \alpha_{-1}^{\mu}\tilde{\alpha}_{-1}^{\nu}\mid 0\rangle \end{array}\right.$$

分别是$SO(24)$表示下massless symmetric traceless的粒子态，massless anti-symmetric traceless的粒子态，还有massless scalar。分别对应的场量描述是度规场，无质量Kalb-Ramond场，Dilaton 场。

```
Claim: Under low energy limits, dynamic of spin-1 particle is
described by Maxwell Field. spin-2 particle is descrbied by Gravity
```

2. 对于闭弦第二激发态，证明同上，形成了spin-4 粒子的$SO(25)$表示。
3. 从little group的角度来看有质量/无质量粒子的表示。对于有质量的粒子，其表示应该写作$SO(25)$ 无质量粒子的表示是$SO(24)$。粒子态可以通过$SO(1,D-1)$作用于某一类粒子态生成。

- Massive： $\mid E,\underbrace{0,\cdots\cdot\cdot,0}_{25}\rangle.$
- Massless： $\mid E,E,\underbrace{0,\cdots\cdot\cdot,0}_{24}\rangle.$

# 4.Need For Superstring

玻色弦提供了一个理论具有描述引力，规范场，标量场等系列可能，但是有一些不能忽视的问题。1.开弦闭弦的基态对应的负质量意味着玻色弦论选取的真空并不稳定；2.玻色弦的体系中没有费米子存在的可能。针对后一个问题，我们可以在作用量层面引入费米场。

---

$S=-\frac{1}{2\pi}\int d\tau d\sigma\,\partial_\alpha X^\mu\partial^a X_\mu-\frac{1}{2\pi}\int d\tau d\sigma\,\overline{\Psi}^\mu\rho^\alpha\partial_\alpha\Psi_\mu$

其中费米部分的作用量写作$\frac{i}{2\pi}\int d\sigma^+d\sigma^-(\psi_+^\mu\partial_-\psi_{+\mu}+\psi_-^\mu\partial_+\psi_{-\mu})$

然后可以导出左行波和右行波的EOM：$\partial_\mp\psi_\pm^\mu=0$

# 5. Charge on String

to be coming

# 6. Duals on String

to be coming

# Appendix：

# A.Quantization

## Lightcone Quantization：

虽然我们使用规范固定可以让$\gamma_{ab} \to \eta_{ab}$,但我们只是用了**世界面坐标**diff以及weyl sym.但是还有一种对称性并没有被完全固定，所以在量子化之前我们需要先固定所有的规范否则会出现异常，在找到真正独立的动力学变量后我们再进行量子化。

**1.Gauge Fixing**

而对这种对称性的描述用到Killing Vector Eqn，但具体的讨论可以用更严谨的共形场论的语言描述，详见【共形变换】

- 找到那个冗余对称性

我们使用世界面光锥坐标更容易看到这种这种对称性:

$$\sigma^{\pm} = \frac{\tau \pm \sigma}{\sqrt{2}}, ds^2 = -2d\sigma^+ d\sigma^-$$

考虑变换$\sigma^+ \to \tilde{\sigma}^+ = f(\sigma^+)$，$\sigma^- \to \tilde{\sigma}^- = g(\sigma^-)$可以发现度规变换只改变一个Weyl因子

$$ds^2 \to -2\partial_+ f \partial_- g d\sigma^+ d\sigma^-$$

所以对Polyakov作用量来说这种变换是gauge sym，关于这种共形对称性更一般的讨论也见【共形变换】

- 光锥规范固定冗余

由于$\sigma^+ \to \tilde{\sigma}^+ = f(\sigma^+)$ 所以$\partial_+\partial_-\sigma^+ = 0$ 注意到所有的$X^\mu$满足$\partial_+\partial_- X^\mu = 0$ 所以我们可以令$\tau = \frac{X^+}{v^+}$,其中$X^\pm = \frac{X^0 \pm X^1}{\sqrt{2}}$对应度规$dX^\mu dX_\mu = -2dX^+dX^- + dX^i dX^i$

**Virasoro Constraints**:

我们之用$\gamma_{ab}$得到的运动方程称作Virasoro Constraints。这里经过计算可以得到

$$\left\{\begin{array}{l} T_{01} = T_{10} X\cdot X' = 0 \\ T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + X'^2) = 0 \end{array}\right.$$

使用光锥坐标并加入conformal gauge之后变成

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2v^+\partial_\tau X^- & = & (\partial_\tau X^i)^2 + (\partial_\sigma X^i)^2 \\ v^+\partial_\sigma X^- & = & \partial_\tau X^i \partial_\sigma X^i \end{array}\right. ,$$

rmk： 我们$X^+$完全由规范固定，所以不是真正独立的自由度。而$X^-$在相差常数项下可以完全由$v^+$，$X^i$决定。所以我们可以看出在Constraint下真正的动力学变量是$X^i$以及$x^-$(积分常数因子)$v^+$。

**2.Quantization**

遵从一般性的正则量子化方案，我们先进行模式展开，之后将模式系数提升为算符。

**模式展开**

- 弦的一般展开模式：……闭弦+两种开弦

**正则变量与以及物理量**

- 找到正则变量： 1.正则量子化中要将正则变量添加对易关系，从而得到各个模式算符的对易关系 2.$\Pi^\mu_a = \frac{1}{2\pi\alpha}\partial_a X^\mu$ 对弦体积积分也就是$\int\ \sigma$得到总动量$p^\mu$ 其中$p^\mu = \frac{l}{2\pi}\frac{v^\mu}{\alpha}$从而赋予$v$变量物理联系$v \leftrightarrow p$。
- On-shell关系：

$$M^2 = -p^\mu p_\mu = 2p^+p^- - p_i^2$$

**找到参数$v$与弦振动模式联系**

- 代入constraints：对于开弦是平凡的，对于闭弦得到level matching condition

$$\sum_{n\neq 0}\alpha^i_{-n}\alpha^i_n=\sum_{n\neq 0}\tilde{\alpha}^i_{-n}\tilde{\alpha}^i_n$$

- 代入EOM：

$$2v^+v^- = v_i^2+\alpha'\sum_{n\neq 0}(\alpha^i_{-n}\alpha^i_n+\tilde{\alpha}^i_{-n}\tilde{\alpha}^i_n)\,. \qquad \text{(closed)}$$

$$2v^+v^- = v_i^2+2\alpha'\sum_{n\neq 0}\alpha^i_{-n}\alpha^i_n \qquad \text{(open)}$$

**正规序** 以$\sum_{n\neq 0}(\alpha^i_{-n}\alpha^i_n)$为例，如果我们交换$\alpha_{-n}\leftrightarrow\alpha_n$，那么在$\sum_{n\neq 0}$下原式不变，可却会由于对易关系出现常数。

由于对易关系$[\alpha^i_n,\alpha^j_m]=[\tilde{\alpha}^i_n,\tilde{\alpha}^j_m]=m\delta^{ij}\delta_{n+m,0}$，记原求和项为$\star$，所以$\star+\sum_n=\star$。利用$\zeta(-1)$函数的解析性以及代入相应系数得到闭弦常数$a_c=-\frac{D-2}{6\alpha'}$，开弦常数$a_o=-\frac{D-2}{24\alpha'}$

于是得到我们写下的玻色弦的质量谱。这套流程可以适用于推导其他弦论的质量谱，这里介绍$R^1/Z_2$orbifold的质量谱，参考【R1Z2orbifold】

注：细节参考任何一本弦论书籍，这里参考liu hong 讲义

## Covariant Quantization

to be continue

## BRST Quantization

to be continue

# B.Introducing topological term in action and string interaction

在分析Polyakov作用量的对称性时，我们发现有三种对称性--Poincare+Diff+Weyl，所以对作用量进行修改的时候不破坏这三种对称性我们认为理论在经典层面上一致。

而增加项满足weyl 对称性，而且没有世界面+背景时空指标所以满足Poincare+Diff对称性；于是可以说当考察弦论局部的性质或者世界面具有平凡的拓扑时，我们不需要考虑这些额外项。但是当世界面的拓扑不平凡的时候，这些项的存在将带来显著的特点。

定义：我们讨论2D 可定向去买呢，其中$K$代表边界Σ外曲率$K=\pm t^a n_b \nabla_a t^b$.其中$t\perp n$，正负号取决于边界类空或者类时

- 关于weyl transform下原作用量不变的证明：

Weyl变换$\gamma_{ab}\to e^{2\omega}\gamma_{ab}$下

$$\begin{cases} R & \to e^{-2\omega}(R-2\nabla_a\partial^a\omega) \\ t & \to e^{-\omega}t \\ n_a & \to e^{\omega}n_a \end{cases}$$

于是外曲率项变成 $K\to e^{-\omega}(K\mp t^a t_a n^b\partial_b\omega)=e^{-\omega}(K+n^a\partial_a\omega)$

所以$S_\chi$在weyl变换下

$$S_X \quad\to\quad \lambda(\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{-\gamma}(R-2\nabla_a\partial^a\omega)+\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Sigma}ds(K+n^a\partial_a\omega))$$

利用斯托克斯定理$\int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{-\gamma}\nabla_a\partial^a\omega)=\int_{\partial\Sigma}dsn^a\partial_a\omega$·

可知$S_\chi$在weyl变换下不变，保留了weyl sym

# C.Discussion on Polyakov and NG Action

注：我们讨论的时空是平坦时空$\eta_{\mu\nu}$

## Low-order approximation of the NG action and its parameter meanings- $\sigma,\tau$:

弦作为只有一个空间一维的连续物体，可以只由一个参数$\sigma$刻画；而弦在时空中的运动需要引入时间参数$\tau$

- $X^\mu$: 弦的在背景时空流形中运动，把时空流形视作“背景”用数学的语言表述就是一维弦运动成二维**世界面**在背景时空流形中的嵌入。而$X^\mu$描述的就是各个背景时

空分量的嵌入方式。

- $h_{ab}=G_{\mu\nu}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$： 这里$G_{\mu\nu}$描述的是背景时空的度规，$h_{ab}$称为诱导度规，描述的是世界面这个二维流形上的度规$ds^2_{ind}=h_{ab}(\sigma,\tau)d\sigma^a d\sigma^b$。
- $\alpha'$: 该弦参数进行如下量纲分析$[\alpha']\equiv L^2\rightarrow\alpha'\equiv l_s^2$，用$l_s$表征的量描述的弦理论特征长度即是$l_s$本身。
- $T\equiv\frac{1}{2\pi\alpha'}$: 这个量称作弦张力(string tension) 。将$h_{ab}$ 代入展开到一阶项，可以得到$L_{NG}=-T+\frac{T}{2}((\partial_0 X^i)^2-(\partial_1 X^i)^2)+O((\partial_X x^i)^4)$.所以如果弦是静止的话，$H=T$ 则T解释为单位长度的能量也就是string tension。对于一阶项，括号内相差一个负号表明弦的振动以光速传播

# Proof of equivalence：

- 思路1：直接证明

参考Prof Liu Hong 2014 fall lec 10 讲义，对Polyakov作用量里的度规变分得到$\gamma^{ab}=B(\sigma,\tau)h^{ab}$然后由于Polyakov作用量的Conformal Sym，化简后原式就是NG作用量。

- 思路2：从运动方程角度出发

参考David Tong String theory ch 2讲义，证明二者都满足运动方程$\partial_\alpha(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta X^\mu)=0$ 由于EOM 是on-shell的物理量，所以EOM相同，两个物理理论等价。

关于物理定律的等价性由下面定理保证--Representation Independence Theorem：
`If different theories are related by field redefinitions that preserve symmetries and have the same 1-particle states), then the results of observables in spacetime of these theories should agree (although the off-shell process might be different but the on-shell calculations are the same, order by order)`

目前我们只得到了经典场论上$S_{NG}$与$S_p$等价，不能而且也不会得到而这在量子层面等价。

**Geometric understanding of the Polyakov action：**

- 形式上来看：$\gamma$的作用类似于一个Lagrange Multiplier
- 几何上来看：$\gamma$是一个生长在世界面上的度规场，$\gamma^{ab}\partial_a X\partial_b X$代表将这个度规场嵌入在世界面的方式，$G_{\mu\nu}\partial X^\mu\partial X^\nu$表示为世界面嵌入背景时空更多方式。

# Form of path integral

我们开始对作用量的描述只涉及$X^\mu$的场，所以$\gamma$应该看做一个拉氏乘子，一个非物理的东西。确实$\gamma$某种程度上说是一种冗余的，我们使用BRST来处理，具体讨论见【路径积分方法】这里给出路径积分形式。

$$\int \mathrm{D}\gamma^{ab}\mathrm{D}X^\mu e^{iS_P[\gamma^{ab},X^\mu]}$$

而这个积分形式有很好的物理解释--我们认为$\gamma$是一个生长在世界面上的度规场，而在作用量中$\gamma$与$X^\mu$耦合。从世界面的角度来看，维度只有$\sigma_1,\sigma_2$所以$X^\mu$即是世界面生物眼中的标量场。而$\gamma$则是世界面生物感受到的二维引力，于是玻色弦论可以视作二维引力与标量场相互作用理论。

# Polyakov action and gauge fixing

## Symmetry

由于Polyakov作用量中有这样的结构$\gamma^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}$，可以看到两对缩并指标。所以这意味着有两个明显的对称：Poincare Sym+Local Diffeomorphism Sym

关于Diff Sym，Tong有一段精彩的论述在这里【diff】

还有一个更重要的对称性--Weyl Sym

#### 2D Weyl Sym & Conformal Gauge

Polyakov Action最重要的一个性质就是$\int d^2\sigma\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}$，上面的f因子可以相互抵消预示着二维世界面可以保证Weyl Transformation Invariance：$g_{\alpha\beta}(\sigma) \rightarrow \Omega^2(\sigma)\, g_{\alpha\beta}(\sigma)$描述的是同一个物理态.

经典场的另一个角度来看，两个理论等同而NG作用量中没有$\gamma_{ab}$的身影就说明$\gamma_{ab}$本身是一种冗余的描述

#### Conformal Gauge

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

也就是$ds^2=ad\sigma^2+2bd\sigma d\tau+cd\tau^2$ 可以通过适当的**选取坐标**使得度规变成$g_{\alpha\beta}=e^{2\phi}\eta_{\alpha\beta}$ 由于我们研究的是弦论，所以我们只关注Polyakov作用量。在Polyakov作用量中有Weyl对称性，所以我们总可以将度规设置为局域平坦的。

Thm：

```
We can use Weyl invariance to make any two-dimensional metric flat
```

于是我们可以将作用量写成：

(这就是D个标量场，D是维数)

$$S=-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int\ d^2\sigma\,\partial_\alpha X\cdot\partial^\alpha X$$

# EOM

对于$\gamma_{ab}$：

$$\frac{-4\pi}{\sqrt{\gamma}}\frac{\delta S}{\delta\gamma^{ab}}\equiv T_{ab}=\partial_a X^\mu\partial_b X_\mu-\frac{1}{2}\gamma_{ab}\gamma^{cd}\partial_c X^\mu\partial_d X^\nu=0$$

关于constraints的rmk：

- $T_{01}=X\cdot X'=0$还有$T_{00}=T_{11}=\frac{1}{2}(\dot{X}^2+X'^2)=0$意义：第一个意味着$\sigma$与$\tau$坐标线垂直
- 理解能动张量与$\frac{\delta S}{\delta\gamma^{ab}}$关系：能动张量对应于poincare sym的守恒流。时空的变换从被动观点来看就是坐标变换:$\delta\gamma_{\alpha\beta}=\partial_\alpha\epsilon_\beta+\partial_\beta\epsilon_\alpha$相应的作用量变换对应于$\delta S=-\int\ d^2\sigma\ \frac{\partial S}{\partial\gamma_{\alpha\beta}}\ \delta\gamma_{\alpha\beta}=-2\int\ d^2\sigma\ \frac{\partial S}{\partial\gamma_{\alpha\beta}}\ \partial_\alpha\epsilon_\beta$
- 另一种理解：$T_{ab}=0$源自Einstein Eqn。如果我们在作用量中加入$R$，对度规变分将得到爱因斯坦张量$G_{ab}$，二维爱因斯坦张量恒为0，所以通过爱因斯坦方程得到$T_{ab}=0$

对于$X^\mu$:

$$\partial_a(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ab}\partial_b X^\mu)=0$$

由于与度规无关，所以可以用conformal gauge化简：$\partial_\alpha\partial^\alpha X^\mu=0$

**Lightcone Coordinate**

切换到光锥坐标后形式会更加简洁，

**EOM**

$$\partial_+\partial_- X^\mu = 0$$

得到通解为

$$X^\mu(\sigma,\tau) = X_L^\mu(\sigma^+) + X_R^\mu(\sigma^-)$$

**Constraints**

$$(\partial_+ X)^2 = (\partial_- X)^2 = 0$$

# D. Remarks on Diffeomorphism

点粒子作用量看微分同胚不变性的物理含义

为了找到一个标量+洛伦兹不变，那么我们选择$S = -m\int\ dt\sqrt{1-\dot{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{x}}}$

但是这个东西并不协变-- $t$只是一个$x$的变量，意味着$x = x(t)$ 而作用量写作$S = \int\ dt L(t)$。我们尝试着 <font color='cornflowerblue'>将$t$提升为动力学变量</font>，但是这样看起来就会增加一个自由度……是这样吗？且听下文分解。

$$S = -m\int\ d\tau\sqrt{-\dot{X}^\mu\dot{X}^\nu\eta_{\mu\nu}}$$

这里的$X$是粒子在$\mu = 0, \cdot., D-1$的时空中的坐标，$\tau$是以世界线长度作为label。这个这个形式更加协变了，但是粒子真的有在时间轴上自由运动的权利吗？

**Gauge Sym**

由于我们真正的自由度并没有时间，所以我们引入了一个冗余的描述，我们可以把这种冗余外加规范固定将我们的麻烦转移。这里通过重参数化不变性来协变的表征这种冗余。

$$S = -m\int\ d\tilde{\tau}\sqrt{-\frac{dX^\mu}{d\tilde{\tau}}\frac{dX^\nu}{d\tilde{\tau}}\eta_{\mu\nu}}$$

Tong的精辟描述： `you know how X0 changes with τ and how X1 changes with τ and so on. Not all of that information is meaningful because τ itself is not meaningful`

冗余的表现：**我们的可观测物理量并不依赖于我们描述的参数**$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} = \frac{m\dot{X}^\nu\eta_{\mu\nu}}{\sqrt{-\dot{X}^\lambda\dot{X}^\rho\eta_{\lambda\rho}}}$

# E.Low Energy Effective Action

to be coming

# F.Orbifolds

to be coming

# G.Remarks on Tachyons

to be coming

# H.Path Integral Approach