Calculation Result

0. 更改度规 & notions

$ds^2 = -\left[1-\left(\frac{r_k}{r}\right)^{\alpha}\right]dt^2 + \left[1-\left(\frac{r_k}{r}\right)^{\alpha}\right]^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right), \quad 0<\alpha<1.$

$1. r_k = 2M$

$2. f(r) = [1-(\frac{r_k}{r})^a]$

1. 求解光子轨道

依据$\mathcal{V}'(r)=0$求解该度规下photon shell的极限半径

$\mathcal{V}(r) = E^2 - f(r)\frac{L^2}{r^2}$

$f(r) = [1-(\frac{r_k}{r})^a]$

$f'(r) = a\cdot r_k^a \cdot r^{-(1+a)}$

$\tilde{r} = (\frac{2+a}{2})^{\frac{1}{a}} r_k$

验证

取$a=1, r_k=2M$得到论文中$\tilde{r}=3M$

2.计算$\tilde{\lambda}$

$\tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{(\frac{2+a}{2})^{\frac{2}{a}} r_k^2}{(\frac{a}{2+a})}}$

验证

取$a=1, r_k=2M$得到论文中$\tilde{\lambda}=3\sqrt{3}M$

3 扰动的演化方程

由于2中得到的photon shell的判定方程是$\mathcal{V}'(r)=0$ 所以我们得到
$\frac{d\delta r}{ds} \approx \sqrt{\frac{1}{2}\mathcal{V}''(\tilde{r})}\,\delta r$代入$\tilde{r}$可得。

而$\mathcal{V}''(r) = r_k^a L^2 r^{-(a+4)}\cdot[a^2+5a+6] - \frac{6L^2}{r^4}$

$$\begin{cases} \delta r(t) = e^{\gamma_L t}\cdot \delta r_0, \gamma_L = \dfrac{\sqrt{a}\cdot L}{\tilde{r}^2} \\ \phi = \sqrt{\dfrac{(\frac{a}{2+a})}{(\frac{2+a}{2})^{\frac{2}{a}} r_k^2}}\,t \end{cases}$$

验证

原式的扰动式为$\frac{d\,\delta r}{ds} = \frac{L}{(3M)^2}\,\delta r$ 其中原式的$\tilde{r}=3M$

求解扰动项R与$\hat{H}$关系

一些参量诸如$R, \hat{H}$的定义

- $\tilde{r}$就是photon shell的半径，我们考虑带有一定扰动的半径，并记作 $r = \tilde{r} \cdot (1 + R)$
- H_0是给定角动量L下的光子能量，我们考虑光子能量的扰动记作$\hat{H} = H - \frac{|L|}{3\sqrt{3}M}$
- 定义冲击参数$b = \frac{|L|}{H}$

体系的Hamiltonian可以由度规求出表达式$H(r, p, p_\phi) = \sqrt{(1 - \frac{2M}{r})[\frac{p_\phi^2}{r^2} + (1 - \frac{2M}{r})p_r^2]}$，反解得到$p_r$的表达式为$p_r(r, H, L) = \pm\frac{\sqrt{\mathcal{V}(r)}}{f(r)}$。这里的$\mathcal{V}(r) = H^2 - f(r)\frac{L^2}{r^2}$。

我们目标是得到photon shell的动力学，所以要求 $p_r = 0$的表达式进行求解。这意味着达到了最小的半径讨论在photon shell表面的动力学。也就是求解 $H^2 - f(r)\frac{L^2}{r^2} = 0$

在这里我们要求解的方程是

$$H^2 - (1 - (\frac{r_k}{r})^a) \cdot \frac{L^2}{r^2} = 0 \qquad (*)$$

采用的方法是直接代入r, H进行展开。但是没有必要求解原式，最后需要的是R_{min}^2.而且原解仿佛也不对？？

二阶**R**和一阶$\hat{H}$的展开

不同于论文中的方法，原式在R的二阶和$\hat{H}$的一阶展开得到.现在验证文章中的结果：

$$R_{\min}^2 = -\frac{2\sqrt{3}\hbar M}{L} + \cdots$$

展开*式：

$$\left(\left(27M^3 - \frac{L^2 M}{H^2}\right) + \frac{2\hat{H}L^2 M}{H^3} + O\left(\hat{H}^2\right)\right) + R\left(\left(81M^3 - \frac{3L^2 M}{H^2}\right) + \frac{6L^2 M\hat{H}}{H^3} + O\left(\hat{H}^2\right)\right) + 81M^3R^2 + O\left(R^3\right)$$

代入b的关系$H \to \frac{L}{3\sqrt{3}M}$

$$\left(\frac{162\sqrt{3}\hat{H}M^4}{L} + O\left(\hat{H}^2\right)\right) + R\left(\frac{486\sqrt{3}M^4\hat{H}}{L} + O\left(\hat{H}^2\right)\right) + 81M^3R^2 + O\left(R^3\right)$$

分析
可以看到没有0阶项，所以0阶近似下原式满足$(*)$式RHS要求；同时在$\hat{H}$的一阶近似下可以求解得到R_{min}^2的关系。这里R_{min}线性项消失。

将该方法推广到分数度规

$$\left(\left(2^{3-\frac{3}{a}}(a+2)^{3/a}M^3 + \frac{2^{2-\frac{2}{a}}(a+2)^{\frac{2}{a}+1}M^2\left(2M - 2^{1-\frac{1}{a}}(a+2)^{\frac{1}{a}}M\right)}{a}\right) - \frac{2\hat{H}\left(\left(\frac{2^{2-\frac{2}{a}}(a+2)^{\frac{2}{a}+1}M^2}{a}\right)^{3/2}\left(2M - 2^{1-\frac{1}{a}}(a+2)^{\frac{1}{a}}M\right)\right)}{L} + O\left(\hat{H}^2\right)\right.$$

这个方法可以得到$a = 1$的时候$R_{min}^2 = -\frac{3\sqrt{3}\hat{H}M}{L}$ 所以这里认为如果认为$lim\, a \to 1$时可以近似求解为$$

$$R_{min}^2 \approx \frac{2\left(\left(\frac{2^{2-\frac{2}{a}}(2+a)^{1+\frac{2}{a}}M^2}{a}\right)^{\frac{3}{2}}(2M - 2^{1-\frac{1}{a}}(2+a)^{\frac{1}{a}}M)\right)}{L\left(32^{3-\frac{3}{a}}(2+a)^{\frac{3}{a}}M^3\right)} \cdot \hat{H} + \ldots$$

记$\tau = \frac{\sqrt{3}\hat{H}M}{L}$,那么原式等价于求解$R^2 + 6Rt + 2t = 0$(注意，R无量纲，所以可以这么做)

那么R_{min}^2解为$\left(\pm\sqrt{9\tau^2 - 2\tau} - 3\tau\right)^2$.

因为$\hat{H}$是一个小量，所以在最后得到的结果中我们考虑最低价近似，于是我们得到关系
$R_{min}^2 = -\frac{2\sqrt{3}\hat{H}M}{L} + \cdots$

Emergence of symmetry in canonical variables

哈密顿力学回顾

1.Hamiltonian的演化方程
$\dot{f} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}$

所以可以得到
$f(\{q\},\{p\},t+\Delta t) = f(\{q\},\{p\},t) + \Delta t\,[f,H]$

并且这里的H可以替换为任何一个物理量g可以得到的是在那个参量下演化的方程

H本身并不是一个算符，这一点是不同于量子力学的。物理量的演化由泊松括号决定，而H在到泊松括号中。可以认为泊松括号就是演化的生成元。

2. 相空间$\{r,\phi,p_r,p_\phi\} \Rightarrow \{T,\Phi,H,L\}$是正则变换,并且验证Poisson Bracket有如下关系
3. 变换
   $\mathrm{d}T = \frac{H}{f(r)\sqrt{\mathcal{V}(r)}}\,\mathrm{d}r$
   $\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}\phi - \frac{L}{r^2\sqrt{\mathcal{V}(r)}}\,\mathrm{d}r$,

关系
$\dot{H} = \{H,H\} = 0$ $\dot{L} = \{L,H\} = 0$ $\dot{\Phi} = \{\Phi,H\} = 0$ $\dot{T} = \{T,H\} = 1$
这里第一二个式子告诉我们在H的演化过程中守恒。

第四个式子告诉我们T与H是一对对易的变量。

① $\dot{H} = \{H, H\} = 0$ 显然.

② $\dot{L} = \{L, H\} = -\{P_\phi, H\} = 0$

③ $\dot{\Phi} = \{\Phi, H\} = 0$ $\Rightarrow \int d\Phi = 0 \Rightarrow$ $\int d\phi = \int \frac{L}{r^2\sqrt{\mathcal{V}(r)}}\cdot dr$

Recap. Poisson Bracket:

$\Delta\phi = \phi_0 - \phi_s$

$\{\varphi, H\}_{PB} = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)$

$= \int_{r_s}^{r_0} \frac{L}{r^2\sqrt{\mathcal{V}(r)}}dr$

$\because d\Phi = d\phi - \frac{L}{r^2\sqrt{\mathcal{V}(r)}}dr$

$\therefore \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = 1$; $\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\frac{L}{r^2\sqrt{\mathcal{V}(r)}}$

$\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{1}{2}\frac{1}{H}\ 2\cdot f(r)\cdot\frac{1}{r^2}\cdot p_\phi = \frac{f(r)p_\phi}{Hr^2}$

$\frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial H}{\partial p_r} = -\frac{L}{r^2\sqrt{\mathcal{V}(r)}}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{H}\cdot 2\cdot f(r)^2\cdot p_r = \frac{f(r)\cdot L}{H\ r^2}\cdot\frac{p_r}{\sqrt{\mathcal{V}(r)}}$

其中$p_\phi = L$

$H^2 = f(r)\left(\frac{p_\phi^2}{r^2} + f(r)\cdot p_r^2\right)$

故 $\mathcal{V}(r) = f(r)\cdot p_r^2$

$\therefore \{\Phi, H\} = 0$

④ $\dot{T} = \{T, H\} = 1$ => T与H是一对共轭变量

$= \frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial H}{\partial p_r}$

$= \frac{H}{f(r)\sqrt{V(r)}} \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{H}\cdot 2\cdot f(r)^2 \cdot p_r$ $\qquad \xrightarrow{?} \quad T = \int_{r_s}^{r_o}\frac{H}{f(r)\sqrt{V(r)}}dr$

$= \frac{p_r \cdot f(r)}{\sqrt{V(r)}}$

$= 1$

3. $SL(2,\mathbb{R})$的涌现
4. $H_+ = \hat{H}$, $\qquad H_0 = -\hat{H}T$, $\qquad H_- = \hat{H}T^2$,
5. $[H_0, H_\pm] = \mp H_\pm$, $\qquad [H_+, H_-] = 2H_0$, $\qquad [H_x, L] = 0\ \forall x \in \{\pm, 0\}$这些对易关系告诉我们H本身并不是不变的，但是L在演化过程中不变，所以我们处在一个superselection sector Γ_L
6. $\begin{cases} H_+ = \hat{H} \\ H_0 = -\hat{H}T \\ H_- = \hat{H}T^2 \end{cases}$ Check => $\boxed{\begin{matrix} [H_0, H_\pm]_{PB} = \mp H_\pm \\ [H_+, H_-]_{PB} = 2H_0 \end{matrix}}$

$\{\hat{H}, \hat{H}T^2\} = \hat{H}\{\hat{H}, T^2\} + \cdots 0$

$= \hat{H}T\{\hat{H}, T\} + \hat{H}\{\hat{H}, T\}T$

$\{\hat{H}, T\} = \{H - \frac{L}{3\sqrt{3}m}, T\}$

$= -1$ 显然 $\{L, T\} = 0$, $L = p_\phi$, $\frac{\partial T}{\partial r} \neq 0$

原式 $= 2H_0$

$[H_0, H_+]$

$\{-\hat{H}T, \hat{H}\} = -\hat{H}\{T, \hat{H}\} = -\hat{H} = -H_+$

$[H_0, H_-]$

$\{-\hat{H}T, \hat{H}T^2\} = -\hat{H}\{T, \hat{H}T^2\} + -\{\hat{H}, \hat{H}T^2\}T$

$= -\hat{H}\{T, \hat{H}\}T^2 + -\hat{H}\{\hat{H}, T^2\}T$

$= -\hat{H}T^2 - 2\hat{H}T \cdot T\{\hat{H}, T\}$

$= HT^2$

$= H_-$

7. Note
   这里的T和H是一对共轭的变量，所以T就是这个系统的与H相对应的时间(吗？)

$\partial_\alpha \hat{H} = \{H_0, \hat{H}\} = -\hat{H}$代表了这个系统哈密顿量扰动的演化方程。其中$\alpha$就是T也对应在photon shell表面的与H相对应的时间流逝具有单向流动的特性。这个也就是为什么论文中说$\hat{H}$最后都会演化到0.也就为$\hat{H}$以及R展开做低阶近似提供了物理基础。

讨论$SL(2,\mathbb{R})$在相空间流形上的不动点

$\{H_m, x\}|_{(\tilde{r}, \tilde{\phi}, \tilde{p}_r, \tilde{p}_\phi)} = 0$, $\qquad \forall x \in \{r, \phi, p_r, p_\phi\}$, $\quad \forall m \in \{-1, 0, 1\}$【这里还没有进行进一步的验证，但是从量纲来看应该是正确的？】

所以相空间的photon ring 边界是一个不动点【为什么讨论这个不动点？数学上确实不错】

和观测结合

我们固定(r_s, ϕ_s) 这个是source star 也就是把黑洞当作一个引力透镜来看；观测点也就是望远镜是(r_o, ϕ_o) 认为这两个点是固定的，那么经过这两个点的null geodesics可以认为在黑洞上的环绕数相差整数个

这是因为天文学尺度比较大，差之毫厘失之千里。所以我们认为固定两个点后，两者曲线轨迹的image相同。

环绕数是离散的⇒观测到的光子轨道是离散的【虽然不得不说这个可能观测不到，理论上确实可能有，但是上面又有观测限制，所以有矛盾？】

为了描述这些我们观测到光子环，我们需要用$SL(2,\mathbb{R})$离散子群。

在$w \gg 1$的时候我们可以找到这个离散子群。这个群的Dilation 写作 这里w是环绕数，$w \propto T$

离散子群的Dilation operator

$R^2_{min} = -\frac{2\sqrt{3}\hat{H}M}{L} \Rightarrow \partial_\alpha \ln R_{min} = -\frac{1}{2}$

对$d\phi$积分得到

$\Delta\phi = \log\left(\frac{1}{R^2_{\text{min}}}\right) + C + ...$

环绕数$w = \frac{\Delta\phi}{2\pi}$ 于是得到环绕数演时间演化

$\partial_\alpha w = \frac{1}{2\pi}$

我们又知道$\partial_\alpha \hat{H} = -\hat{H} \Rightarrow e^{-\alpha H_0}$是hamiltonian的演化【这个dilation 好似下角标不太对】

代入得到上式，可以得到$\Delta\phi \ = \Delta\phi + \alpha$. 所以描述我们可观测的光子环需要Dilation $D_0 = e^{-2\pi H_0}$

在$w \gg 1$这个范围内，R_{min}变化很小，所以可以认为我们近似的到了一个映射$w \to w+1$

也就是说D_0 的作用产生了 `emergent discrete scaling symmetry of the photon ring`

QNMs

Intro

独立的完美的黑洞不存在，真正存在的是一个有耦合的黑洞--例如银河系中心的黑洞，与旁边的星体产生耦合；一个普通的恒星黑洞形成时旁边的气体也会对其扰动；就算是独立的黑洞，也会与真空产生作用。所以一个真实的黑洞永远处在一个perturbed state

$g_{\mu\nu} = g^0_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}.$

黑洞扰动后的性质

1.短时间会outburst 辐射

2.经过一个较长时间的damping proper oscillations 也就是quasinormal modes (quasi指的是这是一个开放的但是会丢失能量的系统)

3.QNMs会被抑制，晚期尾部有power-law suppressed的特性

观测

LIGO等一系列大科学装置观测到的mode应该最低频率的 fundamental mode

AdS/CFT对偶

D+1维asymptotically AdS黑洞的或者是Brane中的QNMs 对应为 D维时空强耦合场中的retarded 格林函数

D>4维黑洞不稳定性对应于共形场中的相变

宇宙中黑洞的描述

如果描述D=4维时空，那么Kerr就是唯一解

如果D>4 那么没有唯一解--这些解有不同的拓扑结构；可以做的是分析这些黑洞是否稳定，也就是找到QNMs的谱。

2.具体技术

我们的目的是描述黑洞带来的时空扰动为此有两种技术，

1.加入一个扰动场

2.扰动度规

线性近似也就是场不会backreact on BH，第一种相对简单。

2.1 EOM

s=0的EOM

基本的描述方式就是KG方程，在弯曲时空中应该改写成这种形式

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\partial_\mu\Psi\right)-\mu^2\Psi=0$$

考虑带电的标量场

$(D^\nu D_\nu-\mu^2)\Psi=0$，$D_\nu=\nabla_\nu-ieA_\nu$

展开后就是

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}(\partial_\mu\Psi-ieA_\mu\Psi)\right)-ieA^\nu\partial_\nu\Psi-(\mu^2+e^2A^\nu A_\nu)\Psi=0$$

2.2 分离变量求解

低能近似下K-G还原到Schrodinger 方程。如果我们认为径向角向变量可以分离，用球面波展开得到每一个分波为

$$\Psi(t,r,\theta,\phi)=e^{-i\omega t}Y_\ell(\theta,\phi)R(r)/\eta$$

在史瓦西度规下求解径向方程得到

$$-\frac{d^2R}{dr_*^2}+V(r,\omega)R=\omega^2R$$

$$V(r)=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}+\frac{2M(1-s^2)}{r^3}\right)$$

Note 不是任何一种情况都可以分离变量，度规需要由足够的对称性。所以需要研究各种Killing矢量场。

Else 两种general approach研究黑洞扰动的方式

- Newman-Penrose tetrads

  处理Kerr-Newman (A)dS背景时空。也就是描述一个charged rotating BH 在AdS或者dS时空中
- gauge-invariant method

处理高维时空扰动，上述方法不如这种，这里处理的时空有 二维时空 $(r,t)\times\mathcal{M}^D$ 其中v、$\mathcal{M}^D\approx\mathcal{N}^2\times\mathcal{K}^{D-2}$

3. QNMs性质

QNMs的边界条件

一般情况

在event horizon $\Psi\sim pure\ ingoing\ wave,\quad r_*\ \longrightarrow\ -\infty$

在spatial infinity $\Psi\sim pure\ outgoing\ wave,\quad r_*\ \longrightarrow+\infty.$

(渐进平坦时空de Sitter BH又叫做de Sitter horizon)

String 情况

情况比较特殊

QNMs的主要性质

1. QNMs 在non-AdS BH 不形成一个complete set；也就是不是所有的信号都可以一直被QNMs 分解---在最后QNMs会衰减的很厉害。
2. QNMs的频率是一种关于黑洞的本征属性，与周围的场无关
3. Kerr黑洞的quasinormal modes形成一个可数的离散频率集合
4. 线性近似与爱因斯坦非线性方程的积分在很大的时间尺度上一致

QNMs

1.物理背景

为了描述黑洞周边引力扰动，除去扰动度规就是加入一个标量场 Ψ

标量场满足Klein Gordon 方程

$(\nabla^\nu\nabla_\nu-\mu^2)\Psi=0$

弯曲时空中写作

$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\left(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\partial_\mu\Psi\right)-\mu^2\Psi=0\quad(s=0)$

2.分离变量扰动展开

对于类史瓦西度规 $ds^2=f(r)\mathrm{d}t^2+f(r)^{-1}\mathrm{d}r^2+r^2\gamma_{ab}\,\mathrm{d}x^a\,\mathrm{d}x^b$ 考虑零质量标量场扰动 $\partial^2\Psi=0$

对Ψ进行分离变量

$\Phi(t,r,\theta,\phi)=\int\mathrm{d}\omega\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}c_{\ell m}(\omega)\Phi_{\ell m\omega}(t,r,\theta,\phi)$

$\Phi_{\ell m\omega}(t,r,\theta,\phi)=e^{-i\omega t}\frac{\psi_{\ell\omega}(r)}{r}Y_{\ell m}(\theta,\phi)$

得到

$\left[\partial_{r_*}^2+V(r_*)\right]\psi_{\ell\omega}(r_*)=0$

这里

$dr_* = \frac{dr}{f(r)}$

$V(r_*) = \omega^2 - f(r)\left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{\partial_r f(r)}{r}\right]$

Comment:
所以在做史瓦西度规扰动后得到上式，也就是把最后 $\frac{2M}{r^3} \Rightarrow \frac{\partial_r f(r)}{r}$ 相比于2205中2.16式

考虑QNMs的Near Ring Region 近似

$$\begin{cases} |\delta r| \ll M & (\text{near}-\text{peak}) \,, \\ |\frac{\ell}{w_R} - \tilde{\lambda}| \ll M & (\text{near}-\text{citical}) \,, \\ |\frac{1}{w_R} \ll M & (\text{high}-\text{frequency}) \,. \end{cases}$$

对于我们考虑到BH，这里的M可以变为r_k

这里我们可以认为w_R很大，ℓ很大，相比之下w_I可以忽略

所以对V进行扰动，保留含有w_R项得到

$\tilde{V}(\delta r) = w_R^2 + 2iw_R w_I - f(r+\delta r)\left[\frac{\ell^2}{(r+\delta r)^2} + \frac{\partial_r f(r)}{r}|_{r+\delta r}\right]$

对应的分数幂次度规，我们得到

$f(r+\delta r)\left[\frac{\ell^2)}{(r+\delta r)^2} + \frac{\partial_r f(r)}{r}|_{r+\delta r}\right] \approx \frac{4^{\frac{1}{a}}(2+a)^{1-\frac{2}{a}} w_R^2}{r_k^2}\delta r^2 + O\left(\delta r^3\right)$

所以我们得到分数幂次度规的修正系数：

于是标量场的扰动方程写作

$\left[\partial_{r_*}^2 + 4^{\frac{1}{a}}(2+a)^{1-\frac{2}{a}}\frac{\omega_R^2}{r_k^2}\delta r^2 + 2i\omega_R\omega_I\right]\psi(\delta r) = 0$

进行变量替换：令$x = r_* - \tilde{r}_* = \frac{\delta r}{\tilde{f}}$,因为 $\partial_{r_*} \approx \tilde{f}\,\partial_{\delta r}$,所以$\partial_{r_*} \Rightarrow \partial_x$

求解得到

$\mathcal{H} \equiv -\frac{1}{2\omega_R}\left[\partial_x^2 + \beta_L^2\omega_R^2 x^2\right]$

$\beta_L \equiv \frac{2^{1/a}a}{r_k(a+2)^{\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}$

而这个就是γ_L。看似是一个巧合，但在最后会给出一个更详尽的论述。

3. γ_L 的推导

上一次计算得到光子环极限半径

$\tilde{r} = (\frac{2+a}{2})^{\frac{1}{a}} r_k$

光子环极限 $\frac{L}{E}$

$\tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{(\frac{2+a}{2})^{\frac{2}{a}} r_k^2}{(\frac{a}{2+a})}}$

考虑光子环扰动方程(见2205 2.10式)

$\frac{d\delta r}{ds} \approx \sqrt{\frac{1}{2}\mathcal{V}''(\tilde{r})}\,\delta r$

由于史瓦西解可以得到一系列守恒量（即2205 2.3式）$E = f(r)\frac{dt}{ds}$

将仿射参数s替换为t得到$\frac{d\delta r}{dt} = \frac{\sqrt{a}}{\tilde{r}^2} f(\tilde{r})\frac{ds}{dt}\delta r$

求解结果为

$\gamma_L = \frac{2^{1/a}a}{r_k(a+2)^{\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}$

4.2205中对该“谐振子”的处理回顾

$\left[\partial_{r_*}^2 + \frac{\omega_R^2}{3M^2}\,\delta r^2 + 2i\omega_R\omega_I\right]\psi(\delta r) = 0$

进行变量替换步骤同上
（因为 $\partial_{r_*} \approx \tilde{f}\,\partial_{\delta r}$，令$x = r_* - \tilde{r}_* = \frac{\delta r}{\tilde{f}}$，所以原式写作 $\mathcal{H}\psi = i\omega_I\psi$，其中
$\mathcal{H} \equiv -\frac{1}{2\omega_R}\left[\partial_x^2 + \gamma_L^2\omega_R^2 x^2\right]$）

然后定义
$a_\pm = \frac{e^{\pm\gamma_L t}}{\sqrt{2\gamma_L\omega_R}}(\mp i\,\partial_x - \gamma_L\omega_R x)$,

$L_0 = -\frac{i}{4}(a_+a_- + a_-a_+) = \frac{i}{2\gamma_L}\mathcal{H},$

$L_\pm = \pm\frac{a_\pm^2}{2}$

就得到了$SL(2,\mathbb{R})_{QN}$

$[L_0, L_\pm] = \mp L_\pm, [L_+, L_-] = 2L_0$顺带还有$[a_+, a_-] = iI$

5.结论

所以QNMs形式上完全的对应不会因为度规改变而形式上修改（只有天文观测系数γ_L可以更改）

于是2205中的关于QNMs的代数形式可以照抄，只是Near Ring Region的定义将$M \Rightarrow \frac{r_k}{2}$

6. Comment

最开始γ_L是考虑光子环扰动得到的结果，也就是李雅普诺夫指数

我们有

$\gamma_L^2 = \frac{1}{2}\mathcal{V}''(r)|_{\tilde{r}}(\frac{ds}{dt})^2$

而且有$\frac{ds}{dt} = \frac{f(r)}{E}$,$\mathcal{V}(r) = E^2 - f(r)\frac{L^2}{r^2}$,$\tilde{\lambda}^2 = \frac{r^2}{f(r)}|_{\tilde{r}}$ 所以

$\gamma_L^2 = \frac{1}{2}f(r)[-\frac{f''(r)}{r^2} + \frac{4f'(r)}{r^3} - \frac{6f(r)}{r^4}]|_{\tilde{r}}$

我们再QNMs中也会遇到相应的结构，巧合的是也能得到相同的结果不同在于我们需要做一些近似。

$\tilde{V}(\delta r) \approx w_R^2 + 2iw_Rw_I - f(r)\left[\frac{\ell^2}{r^2} + \frac{\partial_r f(r)}{r}\right]$

我们的目的是得到$w_R^2\delta r^2$项凑成谐振子形式，由于w_R很大，在Near Ring region近似下，$\ell \approx \tilde{\lambda}w_R$包含$w_R$,只有$\frac{\partial_r f(r)}{r}$不含$w_R$ 所以，在$\frac{1}{w_R} \ll M$条件下，我们可以忽略$\frac{\partial_r f(r)}{r}$ 最后得到$(1 - f(r)\frac{\tilde{\lambda}^2}{r^2})w_R^2$。 与论文中形式一致。

也就是说我们考虑改变度规带来的影响只在这个被略去的项中体现。所以在Near Ring Region近似后，所有的类史瓦西度规有相同结果。

求β_L只需要求解该式的二阶近似。该式即为$(\frac{1}{E})^2(E^2 - f(r)\frac{L^2}{r^2})$ 也就是在相差因子$E, f(r)$意义下与上式同解。所以在变换坐标$r \to x$后得到的β_L就是γ_L。

Note1：这里在$r = \tilde{r}$处，$\mathcal{V}(r)$一阶导为0，0阶项为0，在Photon Ring求解中由定义知，所以展开后最低阶项是二阶项。

对比

QNMs是一种对无质量场标量扰动+Near Ring Region的近似解

$$\left[\partial_{r_*}^2 \;+\; V(r_*)\right]\psi_{\ell\omega}(r_*) \;=\; 0$$

$$V(r) \approx \omega_R^2 - f(r)\tfrac{\ell^2}{r^2}$$

Photon Ring 是基于度规的严格解

$$-\left(\tfrac{dr}{ds}\right)^2 + \mathcal{V}(r) = 0$$

$$\mathcal{V}(r) = E^2 - f(r)\tfrac{L^2}{r^2}$$

后续发现相关论述在后续文献中已经进行更换General的讨论 : (